FELVÉTELI VIZSGÁN KITŰZÖTT FELADATOK
MŰSZAKI EGYETEM – KOLOZSVÁR, 2017. július

1. Adott az $a_n = n\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - a\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ sorozat, ahol $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$. Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor határértéke egyenlő: a) 0 b) -1 c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $-\dfrac{1}{4}$

Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16x^2+1} + 4x - 5$ függvény.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ egyenlő: a) $-\infty$ b) -5 c) 4 d) 8 e) 0

3. Az f függvény aszimptotáinak száma: a) 2 b) 0 c) 1 d) 3 e) 4

Tekintsük az $a^x = 2x + 1$ egyenletet, ahol $a \in (0, +\infty)$ rögzített szám.

4. Az a azon értéke, amelyre $x = 1$ gyöke az egyenletnek, egyenlő:
a) 2 b) 1 c) 3 d) $\ln 2$ e) e

5. Az a azon értékeinek halmaza, amelyre az egyenletnek egyetlen valós gyöke van, egyenlő:
a) $(0, +\infty) \setminus \{e^2\}$ b) $(0, 1] \cup \{e^2\}$ c) $(0, e^2]$ d) $[1, +\infty)$ e) $(0, 1] \cup \{e\}$

6. Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^3 - \operatorname{tg} x}$ függvény. Az $f'(0)$ értéke egyenlő:
a) -1 b) $-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{5}}$ e) $-\sqrt[5]{\dfrac{1}{5}}$

Számítsuk ki:

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x + 3^x}{2\cdot 3^x + 1}$ a) 2 b) 0 c) $+\infty$ d) 3 e) $\dfrac{1}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to+0} ((x+9)^x - 9^x)^x$ a) nem létezik b) 0 c) e d) 1 e) $\ln 9$

Számítsuk ki:

9. $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9}$ a) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\pi}{6}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{\pi}{18}$ e) $\dfrac{\pi}{12}$

10. $\displaystyle\int_1^e \ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ a) -1 b) 1 c) $2e-1$ d) $1-2e$ e) $e+1$

11. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ a) 0 b) $\dfrac{\pi}{4}$ c) $\dfrac{\pi^2}{2}$ d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi^2}{4}$

12. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_2^e (\ln x)^n\mathrm{d}x$ a) e b) 0 c) 1 d) $\ln 2$ e) $+\infty$

13. Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x + 2$ függvény és f^{-1} legyen az f függvény inverze. Az $(f^{-1})'(-2)$ értéke egyenlő: a) 15 b) $\dfrac{1}{6}$ c) 3 d) $\dfrac{1}{3}$ e) 2

Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $A(3,0)$ és $B(0,4)$ pontok.

14. Az O pont távolsága az AB egyenestől egyenlő: a) 2 b) $\dfrac{4}{3}$ c) $\dfrac{12}{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{2}$

15. Az $[AB]$ felezőmerőlegesének egyenlete egyenlő: a) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+(y-2)=0$

b) $4x+3y+4=0$ c) $3x-4y+4=0$ d) $6x-8y+7=0$ e) $x-y=0$

16. Tekintsük az $f_m\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=x^2-(4m+3)x+4m+2$, $m\in\mathbb{R}$ függvénycsaládot. A sík azon pontja, amelyen átmegy az f_m függvények grafikonja, rajta van:

a) az Oy tengelyen b) az Ox tengelyen c) az első szögfelezőn
d) a második szögfelezőn e) más válasz

Legyen e a természetes logaritmus alapja. A $(0,+\infty)$ intervallumon bármely $x>0$, $y>0$ esetén értelmezzük az $x*y=x^{2\ln y}$ műveletet.

17. A semleges elem egyenlő: a) $\sqrt{e}$ b) 1 c) e d) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ e) e^2

18. Ha $x\neq 1$, az x elem szimmetrikusa a „$*$” műveletre nézve egyenlő:

a) e^{-x} b) $\dfrac{1}{x}$ c) $e^{\frac{1}{4\ln x}}$ d) $x^{-2\ln x}$ e) $\dfrac{1}{2\ln x}$

19. Az $a>0$ azon értéke, amelyre $((0,+\infty)\setminus\{a\},*)$ csoport, egyenlő:

a) e b) 1 c) $\dfrac{1}{e}$ d) e^2 e) $\sqrt{e}$

20. Az $e*e*\ldots*e$ érték, ahol az e szám 10-szer szerepel, egyenlő:

a) e^{256} b) e^{10} c) e^{512} d) $10^{\ln 10}$ e) e^{1024}

Adott az $\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & -1\\ x+ay+z & = & -a\\ x+y-z & = & -2\end{array}\right.$ egyenletrendszer, ahol $a\in\mathbb{R}$.

21. A rendszer determinánsa egyenlő:

a) a^2 b) a^2+2a-3 c) a^2-2a+3 d) $-a^2-2a+3$ e) $2a+3$

22. A rendszer akkor és csak akkor összeférhetetlen, ha

a) $a=-1$ b) $a=1$ c) más válasz d) $a\in\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$ e) $a=-3$

23. Az $a\in\mathbb{R}$ azon értékeinek száma, amelyre a rendszer (x,y,z) megoldására az x, y, z értékek számtani haladványban vannak ebben a sorrendben, egyenlő:

a) 0 b) 3 c) 1 d) 2 e) $+\infty$

Adott az $f\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\cos 2x$ függvény.

24. $f(0)$ egyenlő: a) 3 b) -1 c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) 1

25. Az $f(x)=1$ egyenlet megoldásainak száma egyenlő:

a) 1 b) 3 c) 2 d) 5 e) 0

26. Az m valós paraméter azon értékeinek halmaza, amelyre az $f(x)=m$ egyenletnek van megoldása egyenlő:

a) $\left[0,\dfrac{9}{8}\right]$ b) $[-2,0]$ c) $\left[-2,\dfrac{9}{8}\right]$ d) $\mathbb{R}$ e) más válasz

27. A $16^x=3^x+4^x$ egyenlet valós megoldásainak száma egyenlő:

a) 2 b) 1 c) 3 d) 0 e) 4

Adott az $x^4-4x^3+2x^2-x+1=0$ egyenlet, amelynek gyökei x_1, x_2, x_3, $x_4\in\mathbb{C}$.

28. Az $x_1+x_2+x_3+x_4$ összeg értéke egyenlő:

a) -2 b) -4 c) 2 d) 4 e) 1

29. Az egyenlet, amelynek gyökei $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$, egyenlő:

a) $x^4+4x^3-2x^2+x+1=0$ b) $x^4+x^3-2x^2+4x-1=0$ c) $x^4-x^3+2x^2-4x+1=0$
d) $x^4-4x^3-2x^2-x+1=0$ e) $x^4+4x^3+2x^2+x+1=0$

30. Az $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}$ összeg értéke egyenlő:

a) -3 b) 3 c) -2 d) 2 e) 1

Megoldási kulcs: **1.** e); **2.** b); **3.** a); **4.** c); **5.** b); **6.** a); **7.** e); **8.** d); **9.** e); **10.** a); **11.** e); **12.** a) **13.** b); **14.** c); **15.** d); **16.** b) **17.** a); **18.** c); **19.** b); **20.** c); **21.** d); **22.** e); **23.** d) **24.** e); **25.** d); **26.** c); **27.** b) **28.** d); **29.** c); **30.** a).

Megoldások

Összeállította: **Szilágyi Jutka** tanár, Kolozsvár

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-a\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)+\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)+(2-a)\sqrt{n}\right]=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}+(2-n)\sqrt{n}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}(2-a)\sqrt{n}.$

Ha $a<2\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(2-a)\sqrt{n}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty\Rightarrow(a_n)$ nem konvergens.

Ha $a>2\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(2-a)\sqrt{n}=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty\Rightarrow(a_n)$ nem konvergens.

Ha $a=2\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n^2-n}+n^2-n\sqrt{n^2+n}-n^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n^2-n-n^2-n)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n})}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)\cdot n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}.$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{16x^2+1-16x^2}{\sqrt{16x^2+1}-4x}-5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{16x^2+1}-4x}-5\right)=-5.$

3. A 2. feladat alapján az $y = -5$ egyenletű egyenes ferde aszimptotája a függvény $-\infty$-be mutató ágának.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, így a függvény $+\infty$-be mutató ágának nincs vízszintes aszimptotája.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{16+\frac{1}{x^2}}+4-\frac{5}{x}\right)}{x} = 8 \Rightarrow m = 8,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+1}-4x-5\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{16x^2+1-16x^2}{\sqrt{16x^2+1}+4x}-5\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{16x^2+1}+4x}-5\right) = -5 \Rightarrow n = -5.$$

A függvény $+\infty$-be mutató ágának ferde aszimptotája az $y = 8x-5$ egyenletű egyenes.

Mivel f folytonos egész értelmezési tartományán és annak nincsenek olyan torlódási pontjai, amelyek nem elemei az értelmezési tartománynak, a függvénynek nincs függőleges aszimptotája.

Tehát az f függvénynek összesen két aszimptotája van.

4. $x = 1$ gyöke az egyenletnek $\iff$ $a^1 = 2\cdot 1+1$ $\iff$ $a = 3$.

5. Ha $a \in (0,1)$, akkor a $g(x) = a^x - (2x+1)$ függvény szigorúan csökkenő, mivel két szigorúan csökkenő függvény összege, így a $g(x) = 0$ egyenletnek legtöbb egy megoldása van. Mivel $g(0) = 1-1 = 0$, ezért a $g(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy megoldása van: $x = 0$.

Ha $a = 1$, akkor a $2x+1 = 1$ egyenletnek pontosan egy megoldása van: $x = 0$.

Ha $a > 1$, akkor $x = 0$ megoldása a $g(x) = 0$ egyenletnek. Mivel g folytonos függvény, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, annak feltétele, hogy $x = 0$ legyen az egyetlen megoldás az, hogy $g(x) > 0$ bármely $x > 0$ esetén, és $g(x) < 0$ bármely $x < 0$ esetén, ami a $g'(0) = 0$ feltétellel egyenértékű.

De $g'(x) = a^x\cdot\ln a - 2$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $g'(0) = \ln a - 2$, ahonnan $a = e^2$.

Tehát, ha $a \in (0,1]\cup\{e^2\}$ az egyenletnek egyetlen valós megoldása van.

6. $f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\sqrt[5]{\dfrac{x^3-\operatorname{tg}^3 x}{x^5}} = \sqrt[5]{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-\operatorname{tg}^3 x}{x^5}}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3-\operatorname{tg}^3 x}{x^5} = \lim_{x\to0}\frac{(x-\operatorname{tg} x)(x^2+x\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x)}{x^3\cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\left[1+\frac{\operatorname{tg} x}{x}+\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2\right] = 3\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^3} = 3\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2\cdot\cos^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{-x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos^2 x} = (-1)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = -1.$$

Tehát $f'(0) = \sqrt[5]{-1} = -1$.

7. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{2\cdot3^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]}{3^x\left(2+\frac{1}{3^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}{2+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

8. Tudjuk, hogy bármely $a \in \mathbb{R}_+$ esetén $a = e^{\ln a}$.

Így $[(x+9)^x - 9^x]^x = e^{x\ln[(x+9)^x - 9^x]}$ (1).

$$\lim_{x\to 0} x\ln[(x+9)^x - 9^x] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[(x+9)^x - 9^x]}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(x+9)^x - 9^x} \cdot \left\{(x+9)^x \cdot \frac{[x\cdot\ln(x+9) + x + 9]}{x} - 9^x \cdot \ln 9\right\}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x}{(x+9)^x - 9^x} \cdot \lim_{x\to 0} \{(x+9)^x \cdot [x\ln(x+9) + x + 9] - 9^x \cdot x \cdot \ln 9\} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x}{(x+9)^x - 9^x} \cdot 9 = -9 \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x+9)^x - 9^x} =$$

$$= -9 \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+9)^x \cdot \left[\frac{x\ln(x+9) + x + 9 - 9^x \cdot x \cdot \ln 9}{x}\right]} =$$

$$= -9 \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x+9)^x \cdot [x\ln(x+9) + x + 9 - 9^x \cdot x \cdot \ln 9]} = \frac{0}{1\cdot 9} = 0 \qquad (2).$$

(1) és (2) alapján $\lim_{x\to 0} [(x+9)^x - 9^x]^x = e^0 = 1$.

9. $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,1 - \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$

10. $\displaystyle\int_1^e \ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^e -\ln x\mathrm{d}x = -\int_1^e 1\cdot\ln x\mathrm{d}x = -\left(x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\mathrm{d}x\right) =$

$$= -e\ln e + \int_1^e \mathrm{d}x = -e + x\Big|_1^e = -e + e - 1 = -1.$$

11. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{\arccos x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\arccos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$

Az I_1 integrálban a $t = -x$ változócserét alkalmazzuk. Így $I_1 = \displaystyle\int_1^0 \frac{\arccos(-t)}{1+t^2}(-\mathrm{d}t) =$

$$= \int_0^1 \frac{\pi - \arccos t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\arccos t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \pi\mathrm{arctg}\,t\Big|_0^1 - I_2 = \frac{\pi^2}{4} - I_2.$$

Tehát $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - I_2 + I_2 = \frac{\pi^2}{4}.$

12. $I_n = \int\limits_2^e 1 \cdot (\ln x)^n \mathrm{d}x = x(\ln x)^n \Big|_2^e - n \int\limits_2^e (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x \mathrm{d}x =$

$= e - 2(\ln 2)^n - nI_{n-1}$ (1), ahonnan $I_{n-1} = \frac{e}{n} - \frac{2}{n}(\ln 2)^n - \frac{I_n}{n}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ (2).

A feladatban az $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat határértékét keressük.

Igazoljuk, hogy az $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens.

Bármely $x \in (2, e)$ esetén $0 < \ln x < \ln 2 = 1 \Rightarrow (\ln x)^{n+1} < (\ln x)^n$, bármely $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_2^e (\ln x)^{n+1} \mathrm{d}x < \int\limits_2^e (\ln x)^n \mathrm{d}x \Rightarrow I_{n+1} < I_n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$, vagyis az $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan csökkenő. (a)

Ugyanakkor $(\ln x)^n > (\ln 2)^n > 0$ bármely $x \in (2, e)$ és bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, így $\int\limits_2^e (\ln x)^n \mathrm{d}x > \int\limits_2^e (\ln 2)^n \mathrm{d}x = (\ln 2)^n \cdot (e - 2) > 0$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$, vagyis az $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat alulról korlátos. (b)

Az (a) és (b) alapján az $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens, vagyis létezik véges l határértéke.

Az (1)-es összefüggésből $nI_{n-1} = e - 2(\ln 2)^n - I_n$, ahonnan

$$(n-1)I_{n-1} = e - 2(\ln 2)^n - I_n - I_{n-1}, \text{ bármely } n \in \mathbb{N}^* \quad (3).$$

A (2)-es összefüggésben határértékre térve, kapjuk, hogy:

$\lim\limits_{n\to\infty} I_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{e}{n} - (\ln 2)^n \cdot \frac{2}{n} - \frac{I_n}{n}\right]$, vagyis $l = 0$.

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

A (3)-as összefüggésben határértékre térve, kapjuk, hogy:

$\lim\limits_{n\to\infty} [\underbrace{(n-1)I_{n-1}}_{a_{n-1}}] = e$, ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{nI_n}_{a_n} = e$.

13. $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, ahol $f(x_0) = y_0$.

Tehát $f(x_0) = -2 \iff x_0^3 + 3x_0 + 2 = -2 \iff x_0^3 + 3x_0 - 4 = 0$, amelynek egyetlen valós megoldása $x_0 = 1$. Ugyanakkor $f'(x) = 3x^2 + 3$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, így $f'(1) = 6$ és $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$.

14. Az AB egyenes egyenlete: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 12 - 4x - 3y = 0 \iff 4x + 3y - 12 = 0$.

Az $M(x_0, y_0)$ pont távolsága a $d\colon ax + by + c = 0$ egyenletű egyenestől:

$$d(M, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ így } d(0, AB) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}.$$

15. $AB\colon 4x + 3y - 12 = 0 \iff y = -\frac{4}{3}x + 4 \Rightarrow m_{AB} = -\frac{4}{3}$.

Ha az oldalfelező merőlegest d-vel jelöljük, akkor $d \perp AB$, így $m_d \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = \frac{3}{4}$.

Ugyanakkor d átmegy az $[AB]$ szakasz M felezőpontján, ahol $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, vagyis $M\left(\frac{3}{2},2\right)$.

A d egyenes egyenlete $y-2=\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow y-2=\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}\Leftrightarrow 8y-16=6x-9\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6x-8y+7=0$.

16. $f_m(x)=x^2-x+2+m(4-4x)$.

Az f_m átmegy az $A(x_0,y_0)$ ponton $\Longleftrightarrow f_m(x_0)=y_0 \Longleftrightarrow x_0^2+3x_0+2+m(4-4x_0)=y_0$, bármely $m\in\mathbb{R}$ esetén. Ekkor ha $m=0$, akkor $x_0^2-3x_0+2=y_0$ $\quad(1)\Rightarrow(4-4x_0)m=0$, bármely $m\in\mathbb{R}\Rightarrow 4-4x_0=0\Rightarrow x_0=1$, és (1) alapján kapjuk, hogy $y_0=0$. Tehát az A pont rajta van az Ox tengelyen.

17. Legyen E a semleges elem. Ekkor bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén $x\circ E=E\circ x=x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^{2\ln E}=E^{2\ln x}=x\Leftrightarrow 2\ln E\cdot\ln x=\ln x\Leftrightarrow \ln x(2\ln E-1)=0\Leftrightarrow 2\ln E-1=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln E=\frac{1}{2}\Leftrightarrow E=\sqrt{e}\in(0,+\infty)$.

18. Ha $x\neq 1$, $x\in(0,+\infty)$, az x szimmetrikusa az $x'\in(0,+\infty)$, amelyre $x\circ x'=x'\circ x=$ $=\sqrt{e}\Rightarrow x^{2\ln x'}=\sqrt{e}\Longleftrightarrow 2\ln x'\cdot\ln x=\ln\sqrt{e}\Longleftrightarrow \ln x'=\frac{1}{4\ln x}\Longleftrightarrow x'=e^{\frac{1}{4\ln x}}$, ami létezik, ha $x\in(0,+\infty)$ és $x\neq 1$ és $x'\in(0,+\infty)$.

19. A „$*$” művelet asszociatív, van semleges eleme, a $\sqrt{e}$ és egy elem szimmetrikusa $e^{\frac{1}{4\ln x}}$.

Ahhoz, hogy a $G=(0,+\infty)\setminus\{a\}$ csoport legyen a „$*$” művelettel $\sqrt{e}\in(0,+\infty)\setminus\{a\}$, ami bármely a esetén teljesül, ha $a\neq\sqrt{e}$. Ugyanakkor $e^{\frac{1}{4\ln x}}$-nek léteznie kell bármely $x\in G$ esetén, vagyis $\ln x\neq 0\Rightarrow x\neq 1\Rightarrow 1\notin G\Rightarrow a=1$.

20. $e*e=e^{2\ln e}=e^2$, $e*e*e=e^2*e=(e^2)^{2\ln e}=e^4$, $e*e*e*e=e^2*e^2=(e^2)^{2\ln e^2}=$ $=e^{4\cdot 2}=e^8$, $e*e*e*e*e=e^8*e=(e^8)^{2\ln e}=e^{16}$, $\underbrace{e*e*\ldots*e}_{\text{10-szer}}=(e^{16})^{2\ln e^{16}}=e^{16\cdot 2\cdot 16}=e^{512}$.

21. $\det A=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=-a^2+1+1-a-a+1=-a^2-2a+3$.

22. A rendszer összeférhetetlen ha $\det A=0$ és $\operatorname{rang}A\neq\operatorname{rang}\overline{A}$, ami egyenértékű azzal, hogy legalább egy karakterisztikus determináns nem nulla.

$\det A=0\Longleftrightarrow a^2+2a-3=0\Longleftrightarrow a=1$ vagy $a=-3$.

Ha $a=1$, akkor $d_{\text{fő}}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$; $\quad d_{\text{kar}}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\1&-1&-2\end{vmatrix}=0$, tehát a rendszer összeférhető határozatlan.

II. Ha $a=-3$, akkor $d_{\text{fő}}=\begin{vmatrix}-3&1\\1&-3\end{vmatrix}=8\neq 0$; $\quad d_{\text{kar}}=\begin{vmatrix}-3&1&-1\\1&-3&3\\1&1&-2\end{vmatrix}=-18-1+3-$ $-3+9+2\neq 0$, tehát a rendszer összeférhetetlen.

23. $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ esetén $x=\frac{d_x}{d}$, $y=\frac{d_y}{d}$, $z=\frac{d_z}{d}$, ahol

$$d_x=\begin{vmatrix}-1&1&1\\-a&a&1\\-2&1&-1\end{vmatrix}=a-1;\quad d_y=\begin{vmatrix}a&-1&1\\1&-a&1\\1&-2&-1\end{vmatrix}=a^2+3a-4;\quad d_z=\begin{vmatrix}a&1&-1\\1&a&-a\\1&1&-2\end{vmatrix}=-a^2+1$$

és $d=\det A=-a^2-2a+3$. Innen következik, hogy

$$x=\frac{a-1}{-(a-1)(a+3)}=-\frac{1}{a+3};\ y=\frac{(a-1)(a+4)}{-(a-1)(a+3)}=-\frac{a+4}{a+3};\ z=\frac{-(a-1)(a+1)}{-(a+1)(a+3)}=\frac{a+1}{a+3}$$

Az x,y,z számtani haladványban vannak, tehát $y=\dfrac{x+z}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{a+4}{a+3}=\dfrac{-1+a+1}{2(a+3)}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2a-8=a\Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{8}$.

Tehát $a=-\dfrac{3}{8}$ esetén teljesül a kért feltétel.

$a=1$ esetén a rendszer megoldásai az $\begin{cases} y+z &=-1-\alpha\\ y-z &=-2-\alpha\\ \quad x &=\alpha\end{cases}$ rendszer megoldásai.

Innen $x=\alpha$, $y=-\dfrac{3}{2}-\alpha$, $z=\dfrac{1}{2}$.

Mivel x,y,z számtani haladványban vannak, így $-\dfrac{3}{2}-\alpha=\dfrac{\alpha+\frac{1}{2}}{2}\Leftrightarrow -3-2\alpha=\alpha+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\alpha=-\dfrac{7}{2}\iff \alpha=-\dfrac{7}{6}$.

Tehát $a=1$ esetén is van a rendszernek olyan megoldása, amely teljesíti a kért feltételt.
Így összesen két olyan a szám létezik, amely teljesíti a kért feltételt.

24. $f(0)=\sin 0+\cos 0=0+1=1$.

25. $f(x)=1\iff \sin x+1-2\sin^2 x=1\iff \sin x(1-2\sin x)=0\iff \sin x=0$ vagy $1-2\sin x=0\iff \sin x=0$ vagy $\sin x=\dfrac{1}{2}$.

A $\sin x=0$ egyenlet megoldásai a $[0,2\pi]$ intervallumon: 0, π, 2π.

A $\sin x=\dfrac{1}{2}$ egyenlet megoldásai a $[0,2\pi]$ intervallumon: $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$.

Tehát az $f(x)=1$ egyenletnek összesen 5 megoldása van.

26. Írhatjuk, hogy $f(x)=-2\sin^2 x+\sin x+1$, $x\in[0,2\pi]$.
A $\sin x=t$ jelöléssel $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$, ahol $g\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(t)=-2t^2+t+1$.
A g függvény változási táblázata:

t	$[-1$		$\frac{1}{4}$		$1]$
$g(t)$	$[-2$	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	$0]$

$\left(\text{mert } t_{\max}=-\dfrac{4}{2a}=\dfrac{1}{4};\ g\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{9}{8}\right)$.

Tehát $\operatorname{Im} f=\left[-2,\dfrac{9}{8}\right]$. Így az $f(x)=m$ egyenletnek $m\in\left[-2,\dfrac{9}{8}\right]$ esetén van megoldása.

27. $16^x=3^x+4^x\iff \left(\dfrac{3}{16}\right)^x+\left(\dfrac{4}{16}\right)^x=1$.

Legyen $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(\dfrac{3}{16}\right)^x+\left(\dfrac{4}{16}\right)^x$, ekkor $g(x)=1$.

Mivel g szigorúan csökkenő függvény (mint két szigorúan csökkenő függvény összege), ezért g injektív, így a $g(x) = 1$ egyenletnek legtöbb egy megoldása van.

Ugyanakkor $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g folytonos és szigorúan csökkenő, ezért $\mathrm{Im}g = (0, +\infty)$, tehát létezik olyan x_0, amelyre $g(x_0) = 1$. Így a $g(x) = 1$ egyenletnek egyetlen megoldása van.

28. A Viète-összefüggések alapján $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} = \dfrac{4}{1} = 4$.

29. Az eredeti egyenlet esetén felírjuk a Viète-összefüggéseket:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{a_2}{a_4} = 2 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} = 1 \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{a_0}{a_4} = 1 \end{cases}$$

Az $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$, $y_3 = \dfrac{1}{x_3}$, $y_4 = \dfrac{1}{x_4}$ értékekre kiszámoljuk ezeket az összegeket:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \dfrac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} = 1 \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4 = \dfrac{x_3x_4 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3x_4} = 2 \\ y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + y_1y_3y_4 + y_2y_3y_4 = \dfrac{x_4 + x_3 + x_2 + x_1}{x_1x_2x_3x_4} = 4 \\ y_1y_2y_3y_4 = \dfrac{1}{x_1x_2x_3x_4} = 1 \end{cases}$$

Tehát a keresett egyenlet: $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

30. $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} + \dfrac{1}{x_4^2} = \dfrac{(x_2x_3x_4)^2 + (x_1x_3x_4)^2 + (x_1x_2x_4)^2 + (x_1x_2x_3)^2}{(x_1x_2x_3x_4)^2} =$

$= 1 - 2(x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1x_2x_3^2x_4^2 + x_1^2x_2x_3^2x_4 + x_1x_2^2x_3^2x_4 + x_1^2x_2x_3x_4^2 + x_1x_2^2x_3x_4^2) =$

$= 1 - 2 \cdot x_1x_2x_3x_4(x_1x_2 + x_3x_4 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4) = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -3.$