A SKATULYA-ELV

Kassay Ildikó, Szabó Bertalan tanárok, Kolozsvár

Tekintsük a következő feladatokat:

1. Két villanyoszlop távolsága 50 m. A közöttük kifeszített vezetékre 26 fecske száll. Mutassuk ki, hogy mindig van legalább két fecske, melyeknek egymástól való távolsága nem nagyobb 2 m-nél.

2. Egy 10 m oldalhosszúságú, négyzet alakú virágoskertben 101 katicabogár van. Igaz-e, hogy mindig van két olyan katicabogár, melyek $1,5$ m-nél közelebb vannak egymáshoz?

3. A 28-as létszámú osztály matematika dolgozatai között van-e négy ugyanolyan osztályzatú? (Az osztályozás 3 és 10 között van.)

4. Igazoljuk, hogy bármely nyolc természetes szám között mindig van két olyan szám, melyeknek különbsége osztható 7-tel.

Vajon a négy, nagyon különböző feladat megoldásában van-e közös? Létezik-e olyan logikus gondolatmenet, melynek segítségével a fenti feladatoknak ugyanaz a megoldási algoritmus adható?

A felelet igenlő!

A *skatulya-elv*, vagy *Dirichlet-elv* a fenti feladatokra (és még nagyon sok feladatra) ad egységes megoldási gondolatmenetet.

Az elvet először Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) francia származású német matematikus fogalmazta meg.

Dirichlet a XIX. század egyik legnagyobb matematikusa volt. Kortársai elismerését elsősorban széleskörű munkásságával, rendkívüli precizitású, tiszta gondolatmenetű logikájával vívta ki.

Az elv abból a mindenki által elfogadható tényből indul ki, hogy ha 10 skatulyába 11 almát kell betenni, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, melybe legalább két alma kerül.

Általánosabban a *Dirichlet-elv* a következőt mondja ki: *ha n skatulyába $n+1$ tárgyat akarunk elhelyezni, akkor mindig lesz olyan skatulya, amelybe legalább két tárgy kerül.*

A „halmazok nyelvén” ezt az elvet a következőképpen fogalmazhatjuk meg: *Ha van n diszjunkt halmaz, melyek egyesítése n-nél több elemet tartalmaz, akkor a halmazok közt van olyan, amely legalább két elemet tartalmaz.*

A feladatok megoldásánál a fenti elv két változatát alkalmazzuk. Az első a *véges halmazokra* vonatkozik: *Adott n skatulya és $np+q$ $(q>0)$ tárgy. A tárgyakat skatulyába helyezve lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe legalább $p+1$ tárgy kerül.*

Ez a kijelentés indirekt módszerrel bizonyítható.

Feltételezve, hogy minden skatulyába p számú tárgyat teszünk, az n skatulyába np tárgy kerül. Mivel a tárgyak száma $np+q$, ezért lennie kell olyan skatulyának, amelybe p-nél több tárgy kerül.

A *skatulya-elv* megfogalmazható *végtelen* halmazokra is. *Ha n (véges számú) skatulyába végtelen sok tárgyat akarunk elhelyezni, akkor kell legyen legalább egy olyan skatulya, amelybe végtelen sok tárgy kerül.* Másképpen fogalmazva: *véges számú olyan halmaz egyesítése, melyek mindenikének véges számú eleme van, nem lehet végtelen.*

Most pedig oldjuk meg a cikk elején felsorolt feladatokat.

1. Ossszuk fel az oszlopok közötti huzalt 2 m-es szakaszokra, ezek lesznek a skatulyák (25 skatulya van). Mivel 26 fecske száll a vezetékre, lesz olyan skatulya (2 m-es vezetékdarab), amelyre két fecske jut, és így a közöttük levő távolság nem nagyobb 2 m-nél.

2. Osszuk fel a kertet 1 m oldalhosszúságú négyzetekre. Így 100 ilyen kis négyzetet kapunk, ezek lesznek a skatulyák. Mivel a kertben levő katicabogarak száma 101, lesz olyan kis négyzet, amelyben legalább két bogár található.

Egy négyzet belsejében két pont távolsága mindig kisebb vagy egyenlő az átló hosszával. Így a két bogár távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$ m-rel egyenlő, mely kisebb, mint $1,5$ m.

3. A 3-as és 10-es jegyek között nyolcféle osztályzat lehetséges: $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ és 10. Ezért itt a skatulyák száma 8. Minden skatulyába három dolgozat jegyét téve $8 \cdot 3 = 24$ dolgozatot skatulyáztunk. (Vagyis ha mindenik érdemjegyből csak három lenne, az 24 dolgozatot jelentene.) A fennmaradó dolgozatjegyeket valamelyik skatulyába kell tenni. Ebben (vagy ezekben) a skatulyá(k)ban már háromnál több dolgozatjegy lesz. Tehát lesz négy olyan dolgozat, mely ugyanazt a jegyet érdemelte.

4. Egy természetes számnak 7-tel való osztásakor lehetséges maradékok: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ez a hét szám a hét skatulya. Például az első skatulyába kerülnek a $0, 7, 14, 21, \ldots$ számok; a másodikba az $1, 8, 15, 22, \ldots$ számok és így tovább.

Mivel 7 skatulyánk van és 8 természetes számunk, lesz olyan skatulya, amelybe két szám kerül. Ennek a két számnak a 7-tel való osztási maradéka ugyanaz. Ezek különbsége 7-nek többszöröse, vagyis osztható 7-tel.

A továbbiakban oldjunk meg néhány érdekes feladatot a fent ismertetett módszerrel.

5. Igazoljuk, hogy hét tetszőlegesen kiválasztott négyzetszám esetén biztosan van kettő, melyeknek különbsége 10-nek többszöröse.

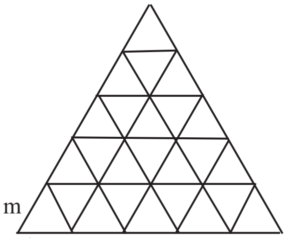
Megoldás. Mivel a négyzetszámok $0, 1, 4, 5, 6$ vagy 9-es számjegyben végződnek, így ezek hat osztályba (skatulyába) sorolhatók. (Például a 9 és a 49 ugyanabba a skatulyába kerül.)

Hét négyzetszám közül lesz kettő olyan, amelyek ugyanabba a skatulyába kerülnek, vagyis ugyanabban a számjegyben végződnek. Ezért különbségük utolsó számjegye nulla, vagyis 10 többszöröse.

6. Legkevesebb hány tanuló jár abba az osztályba, melyről biztosan állíthatjuk, hogy van három olyan tanuló, akik ugyanabban a hónapban ünneplik születésnapjukat?

Megoldás. Az év hónapjai lesznek a skatulyák, ezek száma 12. Ha minden hónapban csak két tanuló ünnepelné születésnapját, akkor az osztályban 24 tanuló lenne. Mivel van olyan hónap, melyben három tanuló született, az osztálylétszám legkevesebb 25.

7. Adott egy 5 m oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög. Igazoljuk, hogy a háromszögben tetszőlegesen elhelyezkedő 26 pont között mindig van legalább kettő, melynek távolsága nem haladja meg az 1 m-t.



Megoldás. Osszuk fel a háromszög oldalait 1 m hosszúságú szakaszokra. Az osztópontokon át húzzunk párhuzamosokat a háromszög oldalaihoz. Így 25 darab, 1 m oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszöget kapunk (25 skatulyánk lesz). Mivel 26 pontunk van, lesz olyan kicsi háromszög (skatulya), melyben két pont van. Ezek távolsága pedig nem lehet nagyobb, mint 1 m.

8. Egy 100 m sugarú, kör alakú versenypályán 7 ló vágtat. Van-e két olyan versenyló, melyek között a távolság légvonalban kisebb, mint 100 m?

Megoldás. Osszuk fel a kört hat egyenlő részre. Az osztópontok közti távolság 100 m. (A szabályos hatszög oldala egyenlő a sugárral.)

Mivel 7 versenyló van, lesz olyan ív (skatulya), amelyben két ló található. Ezek közti távolság légvonalban kisebb, mint a hatszög oldala, azaz kisebb, mint 100 m.

9. Egy állatkert téglatest alakú madárházának méretei 20 m, 10 m és 10 m. A madárházban 17 madár röpköd. Igazoljuk, hogy mindig van két olyan madár, melyek 9 m-nél közelebb vannak egymáshoz.

Megoldás. Mivel 17 madár van a madárházban, azt (képzeletben) 16 részre (skatulyára) kell osztani. A 20 m-es hosszúságot osszuk négy, a 10 m-es éleket két-két egyenlő részre. Ezeken az osztópontokon keresztül a téglalap oldallapjaival párhuzamos síkokat fektetve a téglatestet $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ darab, egyenként 5 m oldalhosszúságú kockákra bontottuk. Ezek lesznek a skatulyák.

Mivel 17 madár van, lesz olyan skatulya, amelyben legalább két madár található. Ezek közti távolság kisebb, mint a kocka testátlója, amely $5\sqrt{3}$ m $\simeq 8,65$ m. Így a két madár távolsága biztosan kisebb, mint 9 m.