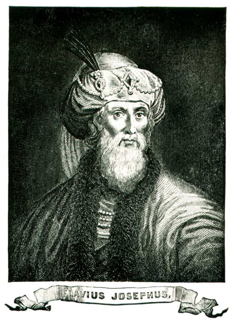
MARADJ TALPON JOSEPHUSSZAL!

Mészár Julianna tanár, Nagyszalonta

Egy n tagú gyerekcsapat körbe állva, $n \in \mathbb{N}$, kiszámolós játékot játszik éspedig úgy, hogy hangosan számolnak: 1-2, 1-2, ..., majd akire a 2-es jut, az kiáll a játékból. Az nyer, aki végig benn marad. Ha 1-től n-ig számozott helyekre állnak, akkor meg lehet-e mondani a játék kezdetén azt, hogy ki nyer?

A kérdés érdekes és sok kísérletet igényel, mire megtaláljuk a választ.



A probléma nem új keletű. Josephus Flavius (37-100) ókori történetíró nevéhez fűződik az a legenda, mely szerint 40 társával együtt a zsidó-római háború során fogságba esett. Mivel a harcosok nem akartak római kézre kerülni, elhatározták, hogy öngyilkosok lesznek, éspedig nagyon érdekes módon: körbe állnak és minden harmadikat megölik. Josephus nem értett egyet ezzel a döntéssel, ezért előre kiszámolta, hova kell állnia, hogy utolsó maradjon a kiszámolás esetén.

Térjünk vissza a gyermekjáték problémájára:

A sajátos esetek vizsgálatakor Josephus-féle permutációk keletkeznek, melyeket elemezve megállapíthatjuk, hogy az eredmény 2 hatványainak függvénye.

Jelölje $J(n)$ az n gyerek esetén utolsónak maradó sorszámát.

$n = 1$ eset egyértelmű, $J(1) = 1$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_1 = (1)$.

$n = 2$ esetben $J(2) = 1$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_2 = (2, 1)$.

$n = 3$ esetben $J(3) = 3$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_3 = (2, 1, 3)$.

$n = 4$ esetben $J(4) = 1$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_4 = (2, 4, 3, 1)$.

$n = 5$ esetben $J(5) = 3$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_5 = (2, 4, 1, 5, 3)$.

$n = 6$ esetben $J(6) = 5$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_6 = (2, 4, 6, 3, 1, 5)$.

$n = 7$ esetben $J(7) = 7$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_7 = (2, 4, 6, 1, 5, 3, 7)$.

$n = 8$ esetben $J(8) = 1$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_8 = (2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1)$.

$n = 9$ esetben $J(9) = 3$, a hozzárendelt Josephus permutáció: $J_9 = (2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3)$.

$n = 10$ esetben $J(10) = 5$, a hozzárendelt Josephus permutáció:

$$J_{10} = (2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5).$$

$n = 11$ esetben $J(11) = 7$, a hozzárendelt Josephus permutáció:

$$J_{11} = (2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7).$$

$n = 12$ esetben $J(12) = 9$, a hozzárendelt Josephus permutáció:

$$J_{12} = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9).$$

Táblázat formájában:

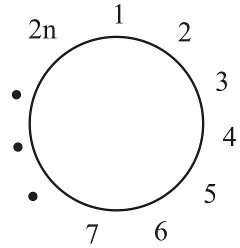
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9

A minta olyan szabályos, hogy folytatni is tudnánk. Most már csak összefüggést kell találnunk a két sor számai között.

Észrevehető, hogy a 2 hatványai között ismétlődik a szabály. Könnyű rájönni a következőre:

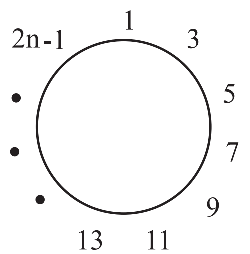
Ha $J(n)$-nel jelöljük az n elem esetén utolsónak maradó sorszámát, és $n = 2^m + l$, ahol $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq l < 2^m$, akkor $J(n) = J(2^m + l) = 2l + 1$. $\quad (*)$

Mivel sajátos esetek általánosításával fogalmaztuk meg a fenti képletet, ezért a matematikai indukció módszerével bizonyítjuk.



Észrevehető, hogy első körben kiesik minden páros szám, tehát a végeredmény nem lehet páros.

Külön tanulmányozzuk a páros és a páratlan eseteket. Ha az elemek száma páros, vagyis $2n$, akkor az első körbejárás után a második ábra szerinti elemeket kapjuk.



A második körben fele annyi elem maradt, mint amennyi először volt. Ha újra számozzuk az elemeket, akkor a $2k-1$ elem új indexe k lesz. Tehát, ha megállapítjuk egy adott kör esetén a végeredményt, akkor a következő kör végeredménye is tudható, hiszen az index kétszereződik mínusz 1.

Tehát $J(2n) = 2J(n) - 1$.

Ha az elemek száma páratlan, vagyis $2n+1$, akkor az első körbejárás után az első helyen kiesik az 1, és az előző módszert használva azt kapjuk, hogy $J(2n+1) = 2J(n) + 1$.

A feladat megoldására szolgáló rekurziós összefüggés a következő:

$$\begin{cases} J(1) = 1 \\ J(2n) = 2J(n) - 1 \\ J(2n+1) = 2J(n) + 1 \end{cases}, \ n \geq 1.$$

Igazoljuk a $(*)$ egyenlőséget a matematikai indukció módszerét alkalmazva:

$P(2) = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \cdot 0 + 1$

Feltételezzük, hogy minden n-nél kisebb értékre igaz a $(*)$ kijelentés.

Bármely n természetes szám felírható a következő alakban: $n = 2^m + l$, ahol $0 \leq l < 2^m$.

Ha n páros szám, akkor

$$J(2^m + l) = 2J\left(2^{m-1} + \frac{l}{2}\right) - 1 = 2\left(2 \cdot \frac{l}{2} + 1\right) - 1 = 2l + 1, \text{ ami igaz.}$$

Ha n páratlan szám, akkor

$$J(2^m + l) = 2J\left(2^{m-1} + \frac{l-1}{2}\right) + 1 = 2\left(2 \cdot \frac{l-1}{2} + 1\right) + 1 = 2l + 1, \text{ szintén igaz.}$$

Másrészt $J(2n+1) - J(2n) = 2$, vagyis az indukció befejeződött.

A probléma megoldása szoros kapcsolatban van a 2-es számrendszerrel. Ennek segítségével, binárisan felírva a feladatban szereplő számokat, egyszerű rekurzióra jutunk:

Ha $n = 2^m \cdot b_m + 2^{m-1} \cdot b_{m-1} + 2^{m-2} \cdot b_{m-2} + \ldots + 2b_1 + b_0$, ahol $b_i \in \{0, 1\}$, és $b_m = 1$, ugyanakkor $n = 2^m + l$, ahol $0 \leq l < 2^m$, akkor $l = 2^{m-1} \cdot b_{m-1} + 2^{m-2} \cdot b_{m-2} + \ldots + 2b_1 + b_0$.

$$J(n) = 2l + 1 = 2 \cdot (2^{m-1} \cdot b_{m-1} + 2^{m-2} \cdot b_{m-2} + \ldots + 2b_1 + b_0) + 1 =$$
$$= 2^m \cdot b_{m-1} + 2^{m-1} \cdot b_{m-2} + \ldots + 2b_0 + 1.$$

Ha $n = (b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_2$, ahol $b_m = 1$, $b_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, (m-1)}$, akkor $n = 2^m + 1$ és $J(n) = 2l + 1 = 2(b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_0) + 1 = (b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_0 1)$.

Tehát a keresett eredményt binárisan úgy kapjuk meg, hogy az n bináris értékeit eggyel balra csúsztatjuk, az első értéket pedig a végére írjuk.

A $(*)$ képlettel most már kiszámíthatjuk bármelyik Josephus permutáció utolsó elemét. Például $J(30) = J(2^4 + 14) = 2 \cdot 14 + 1 = 29$, vagyis a 29. elem marad meg utolsónak a kiszámolós játékban.

A manapság divatos kvízjáték esetén is megfogalmazhatunk hasonló feladatot.

A *Maradj talpon*! kvízjátékban tíz játékos közül úgy válogat a kihívó játékos, hogy 1-től számolva, minden másodikat választja ellenfélnek. Az utoljára kihívott játékosnak van a legtöbb esélye a győzelemre. (Itt azt is figyelembe vesszük, hogy a középső játékosnak elfogy a segítsége, valamint az idő teltével fárad.) Melyik sorszámú helyet válasszuk ahhoz, hogy legnagyobb eséllyel benn maradjunk a játékban, azaz talpon maradjunk?

A képlet alapján $J(10) = J(2^3 + 2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, tehát az 5. számú hely a nyerő.

A feladatot általánosítani is lehet.
Nézzük meg, mi a helyzet $n = 3$ esetén.
Táblázatba foglalva a következő alakzatot kapjuk:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$J(n,3)$	1	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	5	8	11	14	17	20	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

A számításokat $k = 3$ esetén elvégezve, a következő eredményekhez jutunk:
$J(1,3) = 1$
$J(2,3) = 1 + 3 \mod 2 = 1 + 1 = 2$
$J(3,3) = 2 + 3 \mod 3 = 2 + 0 = 2$
$J(4,3) = (2 + 3 \mod 4) \mod 4 = 1$
$J(5,3) = 1 + 3 \mod 5 = 4$
$J(6,3) = (4 + 3 \mod 6) \mod 6 = 1$
$J(7,3) = 1 + 3 \mod 7 = 4$
....
$J(41,3) = (J(40,3) + 3 \mod 41) \mod 41 = 31$

Ha nem hármanként ejtjük ki a sorszámokat, hanem k-anként, akkor $J(n,k)$-val jelölve az utolsó bennmaradó értéket, a következő rekurziós képlethez jutunk:
$J(n,k) = [J(n-1,k] + k \mod n] \mod n$, ahol $J(1,k) = 1$.

A Josephus problémának újabb általánosítása is ismert, még egy változót be lehet vezetni n és k mellé, egy l értéket.

Általánosan: n szám közül minden k-adikat kiejtjük, de mindenki kap l életet. Csak akkor esik ki, ha elfogy az életeinek a száma. Az eredeti problémában $l = 1$. Ebben az esetben $J(n,k,l)$ értékét kell meghatározni, és ekkor keletkeznek az $J(n,k,l)$ típusú Josephus permutációk.

A [4.] forrásanyagban a szerzők számítógépes algoritmusokat mutatnak be a feladat megoldására.

Javasolnám a probléma további általánosítását azzal, hogy a megfelelő elemek annyi életet kapjanak, ahányadik sorszámon állnak és csak akkor essenek ki, ha életeiknek a száma elfogyott.

Szakirodalom

[1]. *Donald E. Knuth, Ronald Graham, Oren Patashnik*: Konkrét matematika, Műszaki kiadó, Budapest, 1998, 8-16 oldal

[2]. Oxford - Matematika : Kislexikon.
http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/oxford-typotex/ch02s12.html

[3]. *Nagy Ádám*: A Josephus probléma. Egy túlélés matematikája, Révai Miklós Gimnázium, Győr.
http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2009/tv0907/nagy.pdf

[4]. *Lei Wang, Xiaodong Wang*: A Comparative Study on the Algorithms for a Generalized Josephus Problem.
http://www.naturalspublishing.com/files/published/3457b055l1a55d.pdf

[5]. *Ion D. Ion, E. Câmpu, A. Ghioca, N. Angelescu, N. Nediţă, G. Streinu-Cercel, R. Ilie, B. Singer*: Matematika, Tankönyv a XII. osztály számára, Ábel kiadó, 2002, 43 oldal.