A TANULÓK ALAPOS MUNKÁRA VALÓ SZOKTATÁSÁRÓL

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

A matematika tanítása során arra törekszünk, hogy tanulóink átgondoltan, pontosan, megbízhatóan dolgozzanak. Ennek érdekében a dolgozataik, házi feladataik javítása során írásban vagy szóban megjegyzéseket teszünk, nyomon követjük a tanórai munkájukat úgy a táblánál, mint a padban. Időnként (anélkül, hogy a naplóba esetleg jegyet írnánk be) fel kell mérjük, hogy hol vannak hiányosságaik, mit kell még begyakoroltatni. Ezek a felmérések célul tűzhetik annak megismerését, hogy a tanulók például

– mennyire megbízhatóan számolnak,
– figyelmesen olvassák-e el a feladatok szövegét,
– kellően tudják-e elemezni a feladatokat,
– alapos-e az elméleti tudásuk,
– mennyire áttekinthető, olvasható a megoldásuk, válaszolnak-e a feladatok kérdéseire,
– az összefüggéseknél pontosítják-e a betűk felvehető értékeit,
– kiterjed-e a figyelmük minden eset vizsgálatára,
– ellenőrzik-e a kapott eredményeket,
– elgondolkodnak-e az eredmények lehetséges voltáról,
– ellenőrzik-e az alkalmazott tételek feltételeit, stb.

Az elkövetkezőkben néhány csapdát rejtő könnyű feladatot mutatok be, amelyekkel tesztelhetjük a tanulók munkájának minőségét, vagy ezekkel próbálhatjuk ösztönözni a tehetséges, de olykor felületesen dolgozó középiskolás diákjainkat a pontosabb munkára.

Az első példám egy olyan feladat, amelynél a csapdát a feltételek tisztázatlansága okozza, s amellyel egy szakellenőrzésen találkoztam:

Ha ab, b^2, c^2 számtani haladványban van, akkor bizonyítsuk be, hogy b, c, $2b-a$ mértani haladványban van.

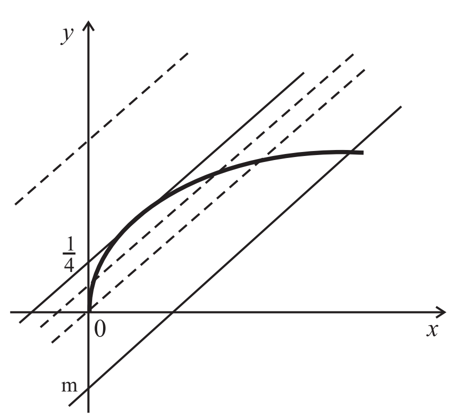
A tanulók a táblánál átírták, hogy az adott számok számtani haladványban vannak, vagyis $ab+c^2=2b^2$, amely átalakítható $c^2=b(2b-a)$ alakba, amiből arra következtettek, hogy az állítás igaz, anélkül, hogy pontosították volna a betűk felvehető értékeit. A megoldás során figyelmen kívül hagyták, hogy a mértani haladvány egyetlen tagja sem lehet nulla. Például az $a=6$, $b=3$, $c=0$ esetben a 18, 9, 0 ugyan számtani haladványban van, de a 3, 0, 0 nincs mértani haladványban. Tehát a feladat megoldását úgy kellett volna zárni, hogy az állítás igaz azon valós a, b, c értékekre, amelyekre b, c, $2b-a$ egyike sem nulla.

(Pályafutásom alatt állandóan viaskodnom kellett a diákjaimmal, hogy megszokják, nem elég egy tulajdonságot kijelenteni, azt is közölni kell, hogy az mire (kire) vonatkozik.)

Még tanulságosabb a következő feladat:

Határozzuk meg az $m\in\mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $\sqrt{x}=x+m$ egyenletnek egy valós megoldása legyen.

(dr. Ambrus András egy előadásának a feladata)



Az ember hajlamos arra, hogy az $x\geq 0$ és $x+m\geq 0$ feltételek után az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelje, és a kapott $x^2+(2m-1)x+m^2=0$ egyenletnél keresse az egyetlen megoldás feltételét, vagyis $\Delta=(2m-1)^2-4m^2=-4m+1=0$, és ez alapján válaszolja meg a kérdést, hogy $m=\dfrac{1}{4}$.

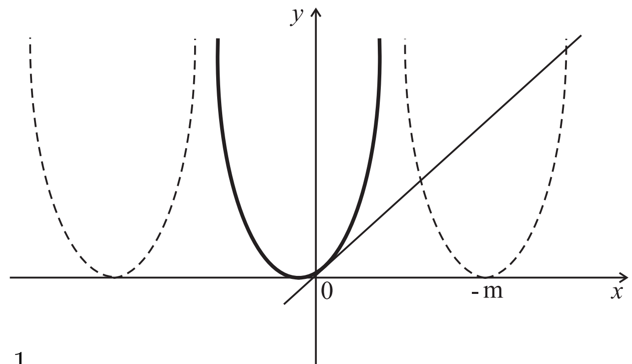
Ha grafikus ábrázolással ellenőrizzük a megoldást, akkor rájövünk, hogy a fenti megoldás hiányos. Ugyanis keressük az összes olyan esetet, amikor az $y = \sqrt{x}$ parabolaágat egyetlen pontban metszi (érinti) az első szögfelezővel párhuzamos $y = x + m$ mozgó egyenes, és rögtön rájövünk, hogy az előzőekben csupán csak az érintés esetét vizsgáltuk.

A teljes megoldás $m \in (-\infty, 0) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

E feladat csapdája elsősorban abban rejlik, hogy az ilyen típusú irracionális egyenleteknél van egy megszokott megoldási mód, és az ember hajlamos rögtön ebbe beleugrani, de már az ehhez hasonló $2^x = mx$, vagy $\ln x = mx$ $(m \in \mathbb{R})$ egyenletek esetén, mivel nincs elemi elindulási lehetőség, csak a grafikus megoldás, vagy a Rolle sorozat alkalmazása kínálkozik.

Azt is érdemes megemlíteni, hogy a grafikus ábrázolással mennyire jól szemléltethető, hogy az egyenlet négyzetre emelésével teljesen megváltozik a feladat.

Az $x = (x + m)^2$ egyenletnél az $y = x$ (első szögfelező) és a mozgó $y = (x + m)^2$ parabola metszéspontjait kell vizsgálni (a parabola szimmetria tengelye $x = -m$ és minimuma a $(-m, 0)$ pontban található).



A négyzetre emelés után már csak az $m = \frac{1}{4}$ esetben van egy érintési pont.

A következő paraméteres egyenlet szintén csapdákat rejt magában:

Az a paraméter mely értékei esetén van pontosan egy megoldása a $25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0$ *egyenletnek?*

(Fejér Lipót verseny, Pécs 1998, XII. osztály)

Az egyenlet az $\mathbb{R}$-en értelmezett és az $5^x = t$, $t > 0$ helyettesítés után a $t^2 - (a-1)t + 2a + 3 = 0$ egyenletet kapjuk, és vizsgálni kell azokat az eseteket, amikor az egyenletnek egy gyöke van és az pozitív, illetve két gyöke van és azok közül pontosan egy pozitív.

Az első esetben $\Delta = a^2 - 10a - 11 = 0$, ha $a = -1$, de ekkor $t = -1$, nem jó, vagy ha $a = 11$, ekkor $t = 5$ és $x = 1$.

A második esetben $\Delta > 0$ és $P = 2a + 3 < 0$, ahonnan $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, vagy $\Delta > 0$ és $P = 2a + 3 = 0$, de az $a = -\frac{2}{3}$ nem felel meg, mert $t = 0$, $t = -\frac{5}{2}$.

Tehát az $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \{11\}$ értékekre lesz az egyenletnek pontosan egy megoldása.

Vannak olyan sajátos szerkezetű paraméteres egyenletek, amelyekben következtetni tudunk arra, hogy melyik szám lehet csak az egyenlet egyetlen gyöke, és így a gyök segítségével határozhatjuk meg a paraméter értékeit. Az ilyen feladatok csapdája viszont az, hogy a kapott paraméter értékkel kötelező módon meg kell oldani az egyenletet, hogy meggyőződjünk arról, hogy a várt gyökön kívül más gyökök nincsenek. Két ilyen feladattípusra is adok példát.

Legyen $f(x) = 0$, $x \in D$ az a paraméteres egyenlet, amelyben keressük a paraméter azon értékeit, amelyre az egyenletnek pontosan egy megoldása van.

1. Ha $f(-x) = f(x)$, bármely $x \in D$ esetén (a függvény páros), akkor az x_0 megoldás esetén a $-x_0$ is megoldás, tehát csak akkor van egyetlen megoldásunk, ha $x_0 = 0$ gyöke az egyenletnek.

Példa ilyen feladatra:

Határozzuk meg az a valós paraméter összes olyan értékét, melyre a következő egyenletnek egyetlen megoldása van:

$$\left|x\ln\frac{1+x}{1-x}+a^2+1\right|=2a.$$

(Olosz Ferenc, Matlap 2012/3, L:1982 feladat)

2. Ha $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$, bármely $x\in D\setminus\{0\}$ esetén, akkor az $x_0\neq 0$ megoldás esetén az $\frac{1}{x_0}$ is megoldás, tehát csak akkor van egyetlen megoldásunk, ha $x_0=1$, vagy $x_0=-1$ gyöke az egyenletnek.

Példa ilyen feladatra:

Határozzuk meg az a valós paraméter összes olyan értékét, melyre a következő egyenletnek egyetlen megoldása van:

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}}+a\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)+a^2-\frac{5}{4}=0.$$

Csapdát rejtenek magukban azon trigonometrikus egyenletek is, amelyeknél olyan átalakítási képleteket alkalmazunk, amelyek az értelmezési halmaz bizonyos értékeire nem értelmezettek. Például a $3\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ egyenlet megoldásánál a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ kifejtését alkalmazva, a felületes megoldó elveszítheti az $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ gyököt, és csak az $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ megoldást kapja meg $(k\in\mathbb{Z})$.

Az $S=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $(x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$ *értékének meghatározása* is olyan feladat, mely körültekintést igényel. Ha vesszük a kifejezés tangensét és alkalmazzuk a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$ $=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ képletet, akkor $\operatorname{tg}S=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\cdot\frac{1-x}{1+x}}=\frac{x^2+1}{1+x^2}=1.$

Az S értékét csak azután mondhatjuk meg miután megvizsgáltuk az $f\colon\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ függvény monotonitását és értékeinek halmazát.

A vizsgálat eredményeként azt kapjuk, hogy ha $x\in(-\infty,-1)$, akkor a függvény szigorúan csökkenő és $\frac{1-x}{1+x}\in(-\infty,-1)$ és ha $x\in(-1,\infty)$, akkor is a függvény szigorúan csökkenő és $\frac{1-x}{1+x}\in(-1,\infty)$.

Csak e vizsgálat után adhatjuk meg a választ:

$$S=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}-\frac{3\pi}{4}, & \text{ha } x\in(-\infty,-1)\\ \frac{\pi}{4}, & \text{ha } x\in(-1,\infty)\end{cases}.$$

Próbára tehetjük, hogy XI. osztályos diákjaink mennyire megbízhatóan dolgoznak, ha kérjük például az $\mathbb{R}$-en értelmezett $f(x)=\arcsin(\sin x)$ függvény deriváltját és deriválhatósági halmazát.

Felületes tudásra vall, ha a tanuló minden feltétel nélkül úgy tekinti, hogy $f(x)=$ $=\arcsin(\sin x)=x$ (ugyanis ez az azonosság csak az $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon igaz). Ha az adott alakban deriváljuk a függvényt, akkor $f'(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{\cos x}{|\cos x|}$, tehát

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ -1, & \text{ha } x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{cases},$$

(a felületesen dolgozók megfeledkeznek a modulus használatáról és így nem különböztetik meg a két esetet).

A példák további felsorolása helyett még meg szeretném említeni, hogy a tanítás során nagyon kedveltem az olyan feladatsorokat, amelyeknél a feladatok között látszatra egész kicsi különbségek voltak, de megoldás során lényeges eltérések jelentkeztek, hogy ezáltal is a feladatok alapos elemzésére kötelezzem diákjaimat.

Például az irracionális egyenletek tanításánál a látszatra egymáshoz nagyon hasonlító $\sqrt{4x+1} = x+1$, $\sqrt{x+25} = x-5$, $\sqrt{x-2} = 2-x$, $\sqrt{2x-6} = 1-x$ egyenletek megoldása során lehet tapasztalni a közöttük található különbségeket.

A függvények határértékének tanításakor a tanulóimat úgy szoktattam rá a feladat elemzésének fontosságára (a határozatlansági esetek felismerésére), hogy egyetlen függvénynek a határértékét kértem különböző torlódási pontokban, vagy a függvényen változtattam folyamatosan egy picit úgy, hogy mindig másképp kelljen dolgozni.

Az aszimptoták tanításánál kedveltem azokat a feladatokat, amelyeknél a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben egymástól különböző aszimptotákat kapunk (például a maximális értelmezési halmazon vett $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ függvény esetén), vagy például az $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ függvény esetén $x = 0$ csak jobbról függőleges aszimptota, balról nem.

Kitartó, következetes munkával és a tanár személyes példaadásával érhető el, hogy a tanítványok is átgondoltan, körültekintően, pontosan dolgozzanak.

Szakirodalom:

[1]. *Katz Sándor*: Matematika versenyfeladatok – A Fejér Lipót matematikaverseny feladatai 1987-2006, Zalamat Alapítvány, Nagykanizsa, 2009

[2]. *Oliver Konnerth*: Greşeli tipice în învăţarea analizei matematice, Ed. Dacia, Cluj, 1982

[3]. *Pintér Ferenc*: Paraméteres egyenletek, egyenletrendszerek megoldása függvénytani alapon (előadás)