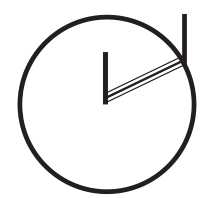
# A $\pi$ SZÁM

**Olosz Ferenc** tanár, Szatmárnémeti

Ha feltesszük a kérdést, hogy mi a $\pi$, akkor az esetek többségében a tanulók a $3,14$ érték megadásával válaszolnak, s kevesen vannak akik tudják, hogy az egy arányszám. Elgondolkodtató, hogy azok közül akik tudják, hogy $\pi$-vel a kör kerületének és átmérőjének arányát jelöljük, többen külön képletként memorálják a $K = 2\pi R$ összefüggést, mintha a két dolognak semmi köze sem lenne egymáshoz.

Javíthatunk ezen a helyzeten, ha a kör kerületét bemutató leckében nemcsak azt mondjuk el, hogy elődeink a kör hosszát a kör átmérőjével próbálták meghatározni, hanem beszélünk arról is hogy a kör hosszát miért pont az átmérővel, és miért nem a sugárral mérték össze?

Elvileg mellékesnek tűnhet a kérdés (lévén, hogy az átmérő a sugár kétszerese), de őseinknek meg volt az oka, hogy az átmérőt használják az összehasonlításhoz. Az indoklást azzal kezdjük, hogy az ókorban az emberek a földre vagy homokba rajzoltak. Akkor is, és ma is, a kör terepen való megrajzolására a kertész módszer a legegyszerűbben kivitelezhető. Ez abból áll, hogy egy kötél két végének összekötözésével kapott hurkot a kör középpontjába leszúrt pálca körül egy másik pálcával kifeszítve mozgatjuk, és a mozgó pálcával karcoljuk a földbe a kört. Ha a pálcák elég vékonyak, akkor a hurok egy helyen való elvágásával kapott köteldarab, mivel már nincs megfeszítve, megközelítőleg átmérő hosszúságú, és ezt helyezték a kört ábrázoló karcolatba, és hasonlították össze annak hosszát a kör hosszával. Földes iskolaudvaron, akár napjainkban is megismételhetjük a $\pi$ értékének közelítő meghatározását.



A diákság jó néven veszi, ha matematikatörténeti információkkal fűszerezzük a leckéinket. A $\pi$-vel kapcsolatos plusz információk nemcsak a kör kerülete és területe leckéknél hangozhatnak el, fel lehet használni az irracionális számok tanításánál, valamint az analízis, valószínűségszámítás, informatika órákon is. Nézzünk röviden néhány $\pi$-re vonatkozó tudnivalót, érdekességet.

A kör kerülete és átmérője arányának $\pi$-vel való jelölését először William Jones használta 1707-ben, de csak 1739-től lett igazán ismert, amikor Euler is javasolta a használatát ($\pi$ a görög perimetrosz = kerület szó kezdőbetűje). Nevezik még Ludolph-féle számnak is Ludolph van Ceulen (1540-1610) tiszteletére, aki 35 tizedesnyi pontossággal számította ki azt.

Időszámításunk előtt 2000 körül a babiloniaknál $\pi \approx \dfrac{25}{8}$, az egyiptomiaknál $\pi \approx \dfrac{256}{81}$ (a kör területének kiszámításánál jelent meg), az indiaiaknál i.e. 500 körül $\pi \approx \sqrt{10}$, $\pi \approx 18(3-2\sqrt{2})$, a többi népeknél pedig a $\pi \approx 3$ volt.

A $\pi$-t tetszőleges pontossággal megadó és jól alkalmazható módszert Arkhimédész (i.e. 287-212) alkotta meg, aki a kör kerületét egyre nagyobb oldalszámú szabályos be- és körülírt sokszögek kerületével közelítette meg, és azt találta, hogy $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}$.

(A legenda szerint Arkhimédész úgy lelte halálát, hogy a tengerpart homokjába rajzolt köreibe beletiport egy római légiós, az idős tudós rászólt, hogy „Noli tangere circulos meos", azaz „Ne háborgasd a köreimet", és ezért a katona leszúrta őt).

A $\pi$-t trigonometrikus úton először Ptolemaiosz (a II. században) közelítette meg, majd Viète (1540-1603) a $\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\ldots$ képlettel tíz tizedesnyi pontossággal számolta ki azt.

Az $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$ hatványsor megjelenésével a számítások leegyszerűsödtek. Az $x = 1$ esetben kapjuk a $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, úgynevezett Leibnitz-képletet, amely sajnos elég lassan konvergál, ezért a $\frac{\pi}{4}$-et több szög összegeként próbálták felírni (például $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, vagy $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$), és ezt fejtették ki az $\operatorname{arctg} x$ hatványsorral. Ezek mellett a $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots$ (Wallis-féle összefüggés), $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ (Euler-sor), a $\frac{4}{\pi}$ felírása lánctörtekkel és más összefüggések teszik lehetővé a $\pi$-nek számítógéppel való kiszámítását.

A $\pi$ értéke bekerült a valószínűségszámítási képletekbe is, amikor a Buffon-féle „tűproblémával" bevezették a geometriai valószínűséget, de más képletekben is előfordul. Például annak valószínűsége, hogy igen nagyszámú véletlenszerűen felírt racionális szám közül valamely tört irreducibilis legyen egyenlő $\frac{6}{\pi^2}$.

Anekdotaként mesélik, hogy egy biztosítási szakember megkért egy matematikust, hogy keresse meg annak valószínűségét, hogy egy embercsoport bizonyos része egy bizonyos idő múlva még életben legyen. A megrendelő nagyon csodálkozott, hogy a kapott eredményben szerepelt a $\pi$ és kételkedett a számítások helyességében, mondván ez nem lehet, mert semmi köze nincs az emberek életben maradásának a kör kerületéhez, vagy területéhez.

A XVII-XVIII. században a matematikusok azért keresték akkora buzgalommal a $\pi$ minél több számjegyét, mert azt hitték, hogy ily módon meg tudják oldani a kör négyszögesítésének híres feladatát. (A régi görögök akkor tekintették meghatározottnak egy síkidom területét, ha tudtak rajzolni azzal egyenlő területű négyzetet. Ezt később latinul kvadrációnak (kvadraturának) nevezték, és ezt fordították magyarra, elég vitathatóan, négyszögesítésnek. Így a kör négyszögesítése azt jelenti, hogy egy adott körrel azonos területű négyzetet kellene szerkeszteni csak körző és vonalzó használatával.)

Az egyre több számjegy kiszámításával felmerült a kérdés, hogy $\pi$ irracionális szám-e?

Lambert 1767-ben igazolta, hogy a $\pi$ irracionális (vagyis végtelen nem szakaszos tizedes tört) és Legendre pedig 1794-ben bizonyította, hogy $\pi^2$ is irracionális szám. A $\pi$ irracionalitásának kimutatásával a kör négyszögesítésének feladata még nem oldódott meg (ugyanis vannak körzővel és vonalzóval szerkeszthető irracionális számok is, például a $\sqrt{2}$).

1882-ben Lindemann kimutatta, hogy a $\pi$ transzcendens szám, vagyis nem lehet racionális együtthatójú algebrai egyenlet gyöke, tehát $\pi$ hosszúságú szakaszt nem lehet körzővel és vonalzóval megszerkeszteni, és ezzel tisztázódott, hogy a kör négyszögesítése nem lehetséges.

A mérnöki és tudományos munkákhoz elegendő a $\pi$ néhány tizedesnyi közelítő értéke.

Íme az első 50 tizedes: $3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$

A számítógépek megjelenéséig az első 20-30 számjegy memorálására pi-versek születtek. Ezekben a versekben szereplő szavak rendre annyi betűt tartalmaznak, mint amennyi a $\pi$ egymásután következő számjegyei (ilyen verseket lehet találni a [6]-ban).

A számítógépeknek köszönhetően a $\pi$-nek már több mint 2700 milliárd számjegyét ismerjük. E sok számjegy kiszámolásával a matematikusok nem kimondott gyakorlati hasznot követnek, ők a módszerek vizsgálatát tartják fontosnak. E szám nagy pontosságú ismerete lehetővé teszi a számítógépek megbízhatóságának tesztelését. Ha egy gép nem működik tökéletesen, akkor a $\pi$-nek e géppel számított értéke, valamelyik számjegytől kezdődően, eltér a pontos értéktől.

**Irodalom:**


[1]. *Barzi Péter*: A $\pi$ kiszámításának rövid története, Polygon, 1999, IX. kötet, 1. szám.
[2]. *C. Chiteş*: Több mint 100 éve ismerjük a $\pi$ szám természetét, Matematikai Lapok, 1984/4-5.
[3]. *Florica T. Câmpan*: Povestea numărului $\pi$, Editura Albatros, 1977.
[4]. *M. Cotariu*: A $\pi$ számról, Matematikai és Fizikai Lapok, 1955/2.
[5]. *Sain Márton*: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
[6]. Pi (szám), http://hu.wikipedia.org/wiki/Pi_(sz%C3%A1m)
[7]. index.hu/tudomany/2010/01/06/2700_milliard_tizedesjegyig_szamoltak_ki_a_pi_erteket