TÖBBISMERETLENES EGYENLETEK MEGOLDÁSA

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

A matematika elsajátításának nélkülözhetetlen eszköze a feladatmegoldás. Feladatmegoldással vezetünk be fogalmakat, ismerünk meg eljárásokat, alakítunk ki megoldási elveket és elméleteket, ugyanakkor feladatokkal rögzítjük és értjük meg igazán az új ismereteket is. Pólya György mondta: „Ha a tanár fejleszteni akarja diákjainak feladatmegoldó készségét, érdeklődést kell ébresztenie bennük a feladatok iránt és bőséges alkalmat kell nyújtania utánzásra és gyakorlásra".

Tanulmányaink során találkozunk olyan feladatokkal, amelyekre a tankönyvekben nem találunk elméleti megalapozást, bemutatást, de a tantervi tananyag segítségével s egy kis ötletességgel meg tudjuk azokat oldani. Ilyen meggondolás alapján kérjük már az általános iskolában a többismeretlenes egyenletek megoldását. Ezen egyenleteket a tananyag bizonyos fejezeteihez kötjük, például a helyértékes számíráshoz, az oszthatósághoz, a prímszámokhoz, a rövidített számolási képletekhez, számhalmazokhoz, paraméteres egyenletekhez stb., anélkül, hogy belemennénk például a diofantoszi egyenletek (többismeretlenes egyenletek, amelyeknek csak az egészszám-megoldásait keressük) részletes ismertetésébe és módszeres megoldásába.

A többismeretlenes egyenletek megoldási eljárásai sok és változatos feladat megoldásával sajátíthatók el. Egy jól kiválasztott feladatsor megoldása után a tanuló kezd ráérezni a megoldási módszerekre, van modellje az utánzásra, gyakorlásra. Ezek a feladatok fejlesztik a kezdeményező-készséget és a kreativitást, általános iskolai és középiskolás tanulóknak egyaránt javasoljuk.

Ezzel az írással egy szemléletmódot akarunk kialakítani, ezért a feladatok előtt közöljük a megoldási elvet. Számítási technikák kialakítására is törekedtünk. A könnyebb nyomon követés érdekében az ötleteket folyamatosan számoztuk, és az azt követő mintafeladatok első száma a megoldásnál felhasználható ötlet számával egyezik meg, a második szám pedig a sorszám.

A feladatokat úgy válogattuk, hogy betekintést nyújtsunk e feladatok sokszínűségébe és az egyszerűtől a bonyolult felé haladva eljussunk közepes nehézségű feladatokig. Az alábbi feladatsorba nem válogattuk be a Matlapban megjelent többismeretlenes egyenleteket, azokat begyakorlásra hagytuk. Az általános iskolásokra való tekintettel a kezdő feladatoknál részletesen leírjuk a megoldás minden lényeges lépését.

A többismeretlenes egyenletek megoldása a valós számok halmazán

1. A legkézenfekvőbb ötlet, ha az egyenletet megoldjuk az egyik ismeretlen szerint, és a többi ismeretlennek úgy adunk értékeket, hogy a megoldásban szereplő kifejezés létezzen és teljesüljenek a kezdeti feltételek is.

1.1. Oldjuk meg a $2x - 5y - 3 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás. Megoldjuk az egyenletet x szerint és y-nak tetszőleges valós értéket adunk: $x = \dfrac{5y+3}{2}$ és $y = \alpha$. A valós megoldások $(x, y) \in \left\{\left(\dfrac{5\alpha+3}{2}, \alpha\right)\right\}$, bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.

Megjegyzés. Ha y szerint oldjuk meg az egyenletet, a megoldás $(x, y) \in \left\{\left(\beta, \dfrac{2\beta-3}{5}\right)\right\}$, bármely $\beta \in \mathbb{R}$ esetén.

A két megoldás azonos: ha a $\dfrac{2\beta-3}{5} = \alpha$-ból kifejezzük a β-t , akkor $\beta = \dfrac{5\alpha+3}{2}$.

1.2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $4x^2 - 5y + 3z + 2 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Az egyenletet y-ban (vagy z-ben) előnyös megoldani: $y = \dfrac{4x^2+3z+2}{5}$, x-nek és z-nek tetszőleges értékeket adunk.

A megoldás $(x, y, z) \in \left\{\left(\alpha, \dfrac{4\alpha^2+3\beta+2}{5}, \beta\right)\right\}$, bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.

1.3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^2y - xy^2 + 2 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Észrevesszük, hogy $y \neq 0$ (ha $y = 0$, akkor $2 = 0$ ellentmondásra jutunk), így az egyenletet x-ben másodfokúnak tekintjük, melynek megoldása $x_{1,2} = \dfrac{y^2 \pm \sqrt{y^4-8y}}{2y}$.

Ahhoz, hogy x és y is valós legyen szükséges, hogy $y^4 - 8y \geq 0$.

Az $y^4 - 8y = y(y-2)(y^2+2y+4)$ felbontással tanulmányozzuk a kifejezés előjelét és kapjuk, hogy $y^4 - 8y \geq 0$, $y \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $y \in (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$.

A megoldás $(x, y) \in \left\{\left(\dfrac{\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4 - 8\alpha}}{2\alpha}, \alpha\right)\right\}$, bármely $\alpha \in (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$ esetén.

Megjegyzés. Itt is az egyik ismeretlen szerint oldottuk meg az egyenletet, de a négyzetgyök jelenléte miatt a másik ismeretlennek csak bizonyos feltételek között adhattunk értékeket.

2. Próbálkozhatunk az egyenlet szorzattá alakításával, és felhasználjuk azt a tulajdonságot, hogy az $\mathbb{R}$-en egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha az egyik szorzótényező nulla.

2.1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $10xy - 4x + 15y - 6 = 0$ egyenletet.

Megoldás. $10xy - 4x + 15y - 6 = 0 \iff (2x+3)(5y-2) = 0 \iff 2x + 3 = 0$ vagy $5y - 2 = 0$. Tehát $(x, y) \in \left\{\left(-\dfrac{3}{2}, \alpha\right), \left(\beta, \dfrac{2}{5}\right)\right\}$, bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.

3. Az egyenletet megpróbálhatjuk két (vagy több) négyzet összegére alakítani, és felhasználjuk, hogy az $\mathbb{R}$-en a négyzetek összege akkor nulla, ha mindegyik tag nulla.

3.1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $2x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 1 = 0$ egyenletet.

1. *megoldás.* $2x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x+2y)^2 + (x-1)^2 = 0 \iff x + 2y = 0$ és $x - 1 = 0$.

Tehát $(x, y) \in \left\{\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

2. *megoldás.* Rendezve x szerint, megoldhatjuk mint másodfokú egyenletet.

$2x^2 + 2(2y-1)x + 4y^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 - 2y \pm \sqrt{-(2y+1)^2}}{2}$, ez csak akkor lesz valós, ha $-(2y+1)^2 \geq 0$, vagyis $2y + 1 = 0$, tehát $(x, y) \in \left\{\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

3.2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $5x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 1 = 0$ egyenletet.

(Cardinal, 2/2009-2010, T.G. 3295.)

Megoldás.

$5x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 1 = 0 \iff (4x^2 - 12xy + 9y^2) + (x^2 + 2x + 1) = 0 \iff (2x-3y)^2 + (x+1)^2 = 0$. Ekkor $2x - 3y = 0$ és $x + 1 = 0$, a megoldás $(x, y) \in \left\{\left(-1, -\dfrac{2}{3}\right)\right\}$.

4. A következő feladatokban bemutatjuk, hogy az úgynevezett kanonikus alakra hozatal lépéseivel hogyan tudjuk tényezőkre, illetve négyzetek összegére bontani a bonyolultabb másodfokú kifejezéseket. A következő lépéssorozatot végezzük:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

4.1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^2+10xy+9y^2-6x-22y+8=0$ egyenletet.

Megoldás. $x^2+10xy+9y^2-6x-22y+8=0 \Leftrightarrow x^2+(10y-6)x+9y^2-22y+8=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(x+\frac{10y-6}{2}\right)^2-\left(\frac{10y-6}{2}\right)^2+9y^2-22y+8=0 \Leftrightarrow (x+5y-3)^2-16y^2+8y-1=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x+5y-3)^2-(4y-1)^2=0 \Leftrightarrow (x+9y-4)(x+y-2)=0 \Leftrightarrow x+9y-4=0$ vagy $x+y-2=0$.

Tehát $(x,y)\in\left\{\left(\alpha,\frac{4-\alpha}{9}\right),(\beta,2-\beta)\right\}$, bármely $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ esetén.

4.2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $72x^2-24xy+4y^2-60x+16y+17=0$ egyenletet.

(Olosz Ferenc)

Megoldás.

$$72x^2-24xy+4y^2-60x+16y+17=4y^2-4(6x-4)y+(72x^2-60x+17)=$$
$$=4\left[y^2-(6x-4)y+\left(18x^2-15x+\frac{17}{4}\right)\right]=$$
$$=4\left[(y-(3x-2))^2-(3x-2)^2+\left(18x^2-15x+\frac{17}{4}\right)\right]=$$
$$=4\left[(y-3x+2)^2+\left(9x^2-3x+\frac{1}{4}\right)\right]=4\left[(y-3x+2)^2+\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2\right]=0.$$

Következik, hogy $y-3x+2=0$ és $3x-\frac{1}{2}=0$. Az egyenlet megoldása $(x,y)\in\left\{\left(\frac{1}{6},-\frac{3}{2}\right)\right\}$.

5. Felhívjuk a figyelmet a helyettesítés alkalmazásának hasznosságára.

5.1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^2-2xy+y^2-5x+5y+6=0$ egyenletet.

Megoldás. $x^2-2xy+y^2-5x+5y+6=0 \iff (x-y)^2-5(x-y)+6=0$. Mivel $x\neq y$, legyen $x-y=t$. Ekkor $t^2-5t+6=0$, ahonnan $x-y=2$ vagy $x-y=3$. Tehát $(x,y)\in\{(\alpha+2,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}\cup\{(\beta+3,\beta)\mid\beta\in\mathbb{R}\}$.

5.2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{2}\cdot\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2}$ egyenletet.

(Vrancea megyei verseny, VII.oszt.)

Megoldás. Az $x\in[2,\infty)$ és $y\in[4,\infty)$ feltételek után a $\sqrt{x-2}=t$ és $\sqrt{y-4}=u$ helyettesítést végezzük, ahonnan $x=t^2+2$ és $y=u^2+4$. Az egyenletbe helyettesítjük és rendezzük:

$$t^2-2\sqrt{2}t+2+u^2-4u+4=0\Rightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)^2+(u-2)^2=0\Rightarrow\begin{cases}t=\sqrt{2}\\u=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=8\end{cases}.$$

5.3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $(x+y)^2=(x+1)(y-1)$ egyenletet.

(Titu Andreescu)

Megoldás. Legyen $x+1=t$ és $y-1=u$, ekkor az egyenlet $(t+u)^2=tu \iff$ $\iff \frac{1}{2}\left[t^2+u^2+(t+u)^2\right]=0$, amelyik teljesül, ha $t=0$ és $u=0$, vagyis $x=-1$ és $y=1$.

6. A következő feladatokban minorálással (majorálással) dolgozunk. Ehhez felhasználjuk az egyenlőtlenség értelmezését, illetve a klasszikus egyenlőtlenségeket.

6.1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x^2+6x+34}+\sqrt{y^2-2y+10}+\sqrt{z^2-6z+25}=12.$$

(Cardinal, 2/2009-2010, T.G. 3300.)

Megoldás. $\sqrt{(x+3)^2+25}+\sqrt{(y-1)^2+9}+\sqrt{(z-3)^2+16}\geq\sqrt{25}+\sqrt{9}+\sqrt{16}=12.$

Egyenlőség csak akkor áll fenn ha $x+3=0$, $y-1=0$ és $z-3=0$, vagyis $x=-3$, $y=1$ és $z=3$.

6.2. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán az $x^2y+2xy^2+18x+4y=16xy$ egyenletet.

(Olosz Ferenc)

Megoldás.

Mivel $x,y\in(0,\infty)$, az egyenletet eloszthatjuk xy-nal, így $\left(x+\frac{4}{x}\right)+\left(2y+\frac{18}{y}\right)=16.$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség alapján $x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$, $2y+\frac{18}{y}\geq 2\sqrt{2y\cdot\frac{18}{y}}=12$, és így $\left(x+\frac{4}{x}\right)+\left(2y+\frac{18}{y}\right)\geq 16$. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $x=\frac{4}{x}$ és $2y=\frac{18}{y}$. Az egyenlet megoldása $x=2$, $y=3$.

6.3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^2+y^2+\frac{x+z}{2}-\sqrt{yz}+\frac{1}{8}=0$ egyenletet, ha tudjuk, hogy $y>0$, $z>0$.

(I. Safta, Gazeta Matematică-B 1/2008, 25937)

Megoldás.

Felhasználjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget: $\frac{y+z}{2}-\sqrt{yz}\geq 0.$

Ekkor $0=x^2+y^2+\frac{x+z}{2}-\sqrt{yz}+\frac{1}{8}=x^2+y^2+\frac{x-y}{2}+\frac{1}{8}+\left(\frac{y+z}{2}-\sqrt{yz}\right)\geq$ $\geq\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\right)+\left(y^2-\frac{y}{2}+\frac{1}{16}\right)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2$, vagyis $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2\leq 0$ csak akkor lehetséges, ha $x=-\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{4}$.

Az egyenlet megoldása $(x,y,z)\in\left\{\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\right\}$.

A többismeretlenes egyenletek megoldása a racionális számok halmazán

7. Ha az egyenlet irracionális számokat is tartalmaz és a megoldást a racionális számok halmazán kérjük, akkor az egyenlet egyik oldalán egy racionális kifejezés és egy irracionális szám szorzatát, a másik oldalán pedig egy racionális kifejezést alakítunk ki. Az egyenlőség csak akkor lehetséges, ha mindkét racionális kifejezés nullával egyenlő.

7.1. Oldjuk meg a racionális számok halmazán az $x(\sqrt{2}+1)-y(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}+3=0$ egyenletet.

(Cardinal 2/2009-2010, T.G. 3302.)

Megoldás.

$(x-y-1)\sqrt{2}=-(x+y+3)$, $x,y\in\mathbb{Q}$ csak akkor lehetséges, ha $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y+3=0 \end{cases}$.

Az egyenlet megoldása $(x,y)\in\{(-1,-2)\}$.

7.2. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet:

$$2x\sqrt{4+\sqrt{15}}-2y\sqrt{4-\sqrt{15}}=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}.$$

(Constantin Rusu, Concursul „Speranţe Râmnicene", 2008, VII. osztály)

Megoldás.

Az összetett gyökképletet alkalmazva $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{4+1}{2}}+\sqrt{\frac{4-1}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$, hasonlóan $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$. Behelyettesítve az egyenletbe $x(\sqrt{10}+\sqrt{6})-y(\sqrt{10}-\sqrt{6})=$ $=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}$, osztunk $\sqrt{2}$-vel és rendezzük az egyenletet $(x+y-9)\sqrt{\frac{3}{5}}=y-x+5$.

Mivel $\sqrt{\frac{3}{5}}$ irracionális szám, $x,y\in\mathbb{Q}$, így az egyenlőség csak akkor lehetséges, ha $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y-x+5=0 \end{cases}$, tehát az egyenlet megoldása $(x,y)\in\{(7,2)\}$.

8. Ha gyanítjuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása, akkor ellentmondásra való vezetéssel próbálkozunk.

8.1. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=\sqrt{5}$ egyenletet.

Megoldás. Legyen $x_0,y_0\in\mathbb{Q}$ az egyenlet megoldása, ekkor $x_0\sqrt{2}+y_0\sqrt{3}=\sqrt{5}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_0\sqrt{2}=\sqrt{5}-y_0\sqrt{3}\Rightarrow 2x_0^2=5+3y_0^2-2y_0\sqrt{15}\Leftrightarrow 2y_0\sqrt{15}=5+3y_0^2-2x_0^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y_0=0$ és $5+3y_0^2-2x_0^2=0\Leftrightarrow y_0=0$ és $x_0^2=\frac{5}{2}$. Mivel $x_0\in\mathbb{Q}$ és $x_0^2=\frac{5}{2}$ egymásnak ellentmond, ezért az egyenletnek nincs racionális megoldása.

9. Felhasználjuk, hogy két racionális szám szorzata racionális szám.

9.1. Oldjuk meg a racionális számok halmazán az $x^n+y^n=x^{n-1}+y^{n-1}$ egyenletet, ahol $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

(Titu Andreescu)

Megoldás. Észrevesszük, hogy $x=0$, $y=0$ az egyenlet megoldása. Legyen $y=\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$. Az egyenlet $x^n+\alpha^n x^n=x^{n-1}+\alpha^{n-1}x^{n-1}$ alakú lesz, ahonnan $x=\frac{1+\alpha^{n-1}}{1+\alpha^n}$, $y=\frac{\alpha(1+\alpha^{n-1})}{1+\alpha^n}$. Mivel az egyenlet szimmetrikus, ezért $x=\frac{\alpha(1+\alpha^{n-1})}{1+\alpha^n}$, $y=\frac{1+\alpha^{n-1}}{1+\alpha^n}$ is megoldás. Ha $\alpha=-1$, akkor az $x=0$, $y=0$ megoldást kapjuk meg.

Tehát $(x,y)\in\left\{(0,0),\left(\frac{1+\alpha^{n-1}}{1+\alpha^n},\frac{\alpha(1+\alpha^{n-1})}{1+\alpha^n}\right),\left(\frac{\alpha(1+\alpha^{n-1})}{1+\alpha^n},\frac{1+\alpha^{n-1}}{1+\alpha^n}\right)\right\}$, $\forall\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$.

A többismeretlenes egyenletek megoldása az egész számok halmazán

Az egész számok és a természetes számok halmazán való megoldási eljárások hasonlóak.

10. Megoldjuk az egyenletet az egyik ismeretlen szerint és a többi ismeretlennek olyan egész szám értékeket adunk, amelyre a kifejezett ismeretlen is egész szám lesz.

10.1. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $5x - 3y + 4 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Megoldjuk az egyenletet y szerint. Ekkor $y = \dfrac{5x+4}{3}$ és a 3-mal való oszthatóság miatt három esetet vizsgálunk meg, aszerint, hogy a maradék 0, 1 vagy 2.

Ha $x = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor $y = \dfrac{15k+4}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Ha $x = 3k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor $y = \dfrac{15k+9}{3} = 5k+3 \in \mathbb{Z}$.

Ha $x = 3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor $y = \dfrac{15k+14}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Az egyenlet megoldásai $(x, y) \in \{(3k+1, 5k+3)\}$, bármely $k \in \mathbb{Z}$ esetén.

Megjegyzés. Ha az egyenletet x szerint oldjuk meg, akkor $x = \dfrac{3y-4}{5}$ és az 5-tel való oszthatóság miatt öt esetet kellene vizsgálni, aszerint, hogy a maradék 0, 1, 2, 3 vagy 4, tehát érdemes arra is odafigyelni, hogy melyik ismeretlen kifejezésével jutunk könnyebben eredményre.

11. Megoldjuk az egyenletet az egyik ismeretlen szerint. A létezési feltételeket biztosítva különválasztjuk a kifejezés egészrészét és törtrészét, és a feladatot átalakítjuk egy egész számnak egy egész kifejezéssel való oszthatóságára.

11.1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $2x + xy - y^2 = 13$ egyenletet.

(Teodora Niţă, Gazeta Matematică-B, 5-6/2008, E:13663)

Megoldás. Az $x(y+2) = y^2 + 13$ egyenletben $y = -2$ ellentmondáshoz vezet, tehát $y + 2 \neq 0$, így $x = \dfrac{y^2+13}{y+2} = \dfrac{y^2-4+17}{y+2} = y - 2 + \dfrac{17}{y+2} \Rightarrow y + 2 \in \{-17, -1, 1, 17\} \Rightarrow$
$\Rightarrow y \in \{-19, -3, -1, 15\}$.

Az egyenlet megoldásai $(x, y) \in \{(-22, -19), (-22, -3), (14, -1), (14, 15)\}$.

12. Ha az egyik ismeretlent kifejezve $\dfrac{at+b}{ct+d}$ alakú törtet kapunk, ahol $a, b, c, d, t \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, a és c relatív prímek, akkor a számláló és nevező olyan lineáris kombinációját képezzük, amelynek eredménye egy egész szám: $c(at+b) - a(ct+d) = bc - ad \in \mathbb{Z}$.

Ezt az egyenlőséget elosztjuk $(ct+d)$-vel és kapjuk, hogy $\dfrac{c(at+b)}{ct+d} - a = \dfrac{bc-ad}{ct+d}$. Tudjuk, hogy $a, c \in \mathbb{Z}$ és ha $\dfrac{at+b}{ct+d} \in \mathbb{Z}$, akkor következik $\dfrac{bc-ad}{ct+d} \in \mathbb{Z}$.

12.1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $2xy - 3x - 3y - 5 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Mivel az egész számok halmazán $2x - 3 \neq 0$, megoldjuk az y-ban elsőfokú egyenletet, ahonnan következik, hogy $y = \dfrac{3x+5}{2x-3}$.

$y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{3x+5}{2x-3} \in \mathbb{Z}$ és felhasználjuk, hogy $2(3x+5) - 3(2x-3) = 19 \Rightarrow \dfrac{2(3x+5)}{2x-3} - 3 =$
$= \dfrac{19}{2x-3} \Rightarrow \dfrac{19}{2x-3} \in \mathbb{Z}$, következik, hogy $2x - 3 \in \{-19, -1, 1, 19\} \Rightarrow x \in \{-8, 1, 2, 11\}$.

Tehát $(x,y)\in\{(-8,1),(1,-8),(2,11),(11,2)\}$.

13. Az egyenletet úgy alakítjuk át, hogy egész kifejezések szorzata egyenlő legyen egy egész számmal. Ezért ahány tényezős a kifejezések szorzata, annyi egész szám szorzatára bontjuk az egyenlet másik oldalán található egész számot is. Az egyenlet két oldalán helyet foglaló tényezőket rendre egyenlővé tesszük, megoldjuk az így kapott egyenletrendszert és ezt megismételjük minden lehetséges felbontás esetén. Az egyenletrendszerek megoldásán rövidíthetünk, ha ideiglenesen elnevezzük a szám szorzótényezőit és e paraméterekkel oldjuk meg a rendszert.

13.1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $6x^2-7xy+2y^2-3=0$ egyenletet.

Megoldás. $6x^2-7xy+2y^2-3=0 \iff (3x-2y)(2x-y)=3$. Legyen $\begin{cases} 3x-2y=a \\ 2x-y=b \end{cases}$, ahol $a,b\in\mathbb{Z}$ és $ab=3$, tehát $(a,b)\in\{(1,3),(3,1),(-1,-3),(-3,-1)\}$. Az egyenletrendszer megoldásai $x=2b-a$ és $y=3b-2a$. Behelyettesítve az a,b értékeit, kapjuk az adott egyenlet megoldásait: $(x,y)\in\{(5,7),(-1,-3),(-5,-7),(1,3)\}$.

13.2. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$ egyenletet.

(Titu Andreescu)

Megoldás. $(x^2y^2-2xy+1)+(x^2-2xy+y^2)+2(x-y)(1-xy)=4 \iff$
$\iff (1-xy)^2+(x-y)^2+2(1-xy)(x-y)=4 \iff (1-xy+x-y)^2=4 \iff$
$\iff |1-xy+x-y|=2 \iff |(1+x)(1-y)|=2$.
Ha $(1+x)(1-y)=2$, akkor $1+x=2$ és $1-y=1$, tehát $x=1$, $y=0$.
$1+x=1$ és $1-y=2$, tehát $x=0$, $y=-1$.
$1+x=-2$ és $1-y=-1$, tehát $x=-3$, $y=2$.
$1+x=-1$ és $1-y=-2$, tehát $x=-2$, $y=3$.
Ha $(1+x)(1-y)=-2$, akkor $1+x=2$ és $1-y=-1$, tehát $x=1$, $y=2$.
$1+x=1$ és $1-y=-2$, tehát $x=0$, $y=3$.
$1+x=-2$ és $1-y=1$, tehát $x=-3$, $y=0$.
$1+x=-1$ és $1-y=2$, tehát $x=-2$, $y=-1$.
Tehát $(x,y)\in\{(1,0),(0,-1),(-3,2),(-2,3),(1,2),(0,3),(-3,0),(-2,-1)\}$.

13.3. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $x^2+4y=9$ egyenletet, ha $|y|$ prímszám.

(Hunyad megyei verseny, VII.oszt)

Megoldás. Megoldjuk az y-ban elsőfokú egyenletet: $y=\dfrac{9-x^2}{4}\Rightarrow y=\dfrac{(3-x)(3+x)}{4}$.
Mivel $x,y\in\mathbb{Z}$, így a $\dfrac{(3-x)(3+x)}{4}$ tört csak akkor lehet egész szám, ha x páratlan. Legyen $x=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$. Ekkor $y=(1-k)(2+k)$ és mivel $|y|$ prímszám, ezért vagy $1-k=\pm1$, vagy $2+k=\pm1$.

A négy lehetséges esetből a feladat feltételeinek csak az $(x,y)\in\{(1,2),(-1,2)\}$ megoldások felelnek meg.

14. A feladat sajátosságainak kihasználása.

14.1. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $x^2+y^2+x+y-2=2^{|x-y|}+1$ egyenletet.

(I. Safta, Gazeta Matematică-B, 6/ 2009, E:13844)

Megoldás. Ennél az egyenletnél nem használható az eddig bemutatott egyik ötlet sem. Vizsgáljuk meg az egyenlet sajátosságát. Az egyenlet bal oldala $x(x+1)+y(y+1)-2$ alakban írható, ami páros szám, mert két egymás után következő egész szám szorzata mindig páros és páros számok összege szintén páros, ezért ebből következik, hogy az egyenlet jobb oldala is páros kell legyen, vagyis $2^{|x-y|}$ páratlan, tehát $|x-y|=0$ és így $x=y$. Megoldva az $x^2+x-2=0$ egyenletet, az adott egyenlet megoldásai: $(x,y)\in\{(1,1),(-2,-2)\}$.

A többismeretlenes egyenletek megoldása a természetes számok halmazán

A megoldási elvek azonosak az egész számok halmazán bemutatott megoldási elvekkel.

15. Megoldjuk az egyenletet az egyik ismeretlen szerint, és a többi ismeretlennek olyan természetes értékeket adunk, amelyre a kifejezett ismeretlen is természetes szám lesz.

15.1. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a $2x-5y-3=0$ egyenletet.

Megoldás. Az egyenletet megoldjuk x szerint, ekkor $x=\dfrac{5y+3}{2}$.

A 2-vel való oszthatóság miatt két esetet vizsgálunk:

ha y páros, vagyis $y=2n$, $n\in\mathbb{N}$, akkor $x=\dfrac{10n+3}{2}\notin\mathbb{N}$;

ha y páratlan, vagyis $y=2n+1$, $n\in\mathbb{N}$, akkor $x=\dfrac{10n+8}{2}=5n+4\in\mathbb{N}$.

Az egyenlet megoldásai $(x,y)\in\{(5n+4,2n+1)\}$, bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén.

Megjegyzés. Ha az egyenletet y szerint oldjuk meg, akkor $y=\dfrac{2x-3}{5}$, ahol az 5-tel való oszthatóság miatt öt esetet kell megvizsgálni (aszerint, hogy a maradék 0, 1, 2, 3 vagy 4), így arra is érdemes odafigyelni, hogy melyik ismeretlen kifejezésével jutunk könnyebben eredményre.

16. Mint ahogy az egész számok halmazán való megoldás során tettük, itt is az egyenletet úgy alakítjuk át, hogy egész kifejezések szorzata egyenlő legyen egy természetes számmal. Ahány tényezős a kifejezések szorzata, annyi természetes szám szorzatára bontjuk az egyenlet másik oldalán található természetes számot is. Az egyenlet két oldalán helyet foglaló tényezőket rendre egyenlővé tesszük, megoldjuk az így kapott egyenletrendszert, és ezt megismételjük minden lehetséges felbontás esetén. Az egyenletrendszerek megoldásán rövidíthetünk, ha ideiglenesen elnevezzük a szám szorzótényezőit és e paraméterekkel oldjuk meg a rendszert.

16.1. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a $2x^2+7xy+6y^2-4x-6y-5=0$ egyenletet.

(Olosz Ferenc)

Megoldás.

$(2x^2+4xy-4x)+(3xy+6y^2-6y)=5 \iff 2x(x+2y-2)+3y(x+2y-2)=5 \iff$

$\iff (x+2y-2)(2x+3y)=5$. Ekkor $\begin{cases} x+2y-2=1\\ 2x+3y=5\end{cases}$, amelynek megoldása $\begin{cases} x=1\\ y=1\end{cases}$ vagy

$\begin{cases} x+2y-2=5\\ 2x+3y=1\end{cases}$, amelynek megoldása $\begin{cases} x=-19\notin\mathbb{N}\\ y=13\end{cases}$.

Tehát az egyenlet megoldása $(x,y)\in\{(1,1)\}$.

Megjegyzés. A szorzattá alakítást itt csoportosítással végeztük, de elvégezhető úgy is, hogy kanonikus alakra hozatallal két négyzet különbségét alakítjuk ki és a második négyzet kialakításánál keletkező állandót átvisszük a jobb oldalra.

17. Négyzetek összegére való bontás.

17.1. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a $6\sqrt{x-2}+8\sqrt{y-3}+10\sqrt{z-4}=$ $=x+y+z+41$ egyenletet.

(Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Gazeta Matematică-B, 2/2009, E:13790)

Megoldás.

Az egyenlet létezik, ha $x \geq 2$, $y \geq 3$, $z \geq 4$. Legyen $x-2=t$, $y-3=u$, $z-4=v$, ekkor $6\sqrt{t}+8\sqrt{u}+10\sqrt{v}=t+u+v+50 \Leftrightarrow (t-6\sqrt{t}+9)+(u-8\sqrt{u}+16)+(v-10\sqrt{v}+25)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\sqrt{t}-3)^2+(\sqrt{u}-4)^2+(\sqrt{v}-5)^2=0$, ami csak akkor lehetséges, ha $\sqrt{t}-3=0$, $\sqrt{u}-4=0$, $\sqrt{v}-5=0$, vagyis $t=9$, $u=16$, $v=25$.

Az egyenlet megoldása $(x,y,z) \in \{(11,19,29)\}$.

18. Az egyenlet sajátosságainak kiaknázása.

18.1. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2003}$ egyenletet.

(Daniel Cojocaru, Gazeta Matematică-B, 10/2007, E:13538)

Megoldás.

Ha (a,b) az egyenlet egy megoldása, akkor $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2003} \iff \sqrt{a}=\sqrt{2003}-\sqrt{b}$, ahonnan $a=2003+b-2\sqrt{2003b}$, és ennek alapján $\sqrt{2003b}$ csak természetes szám lehet.

Mivel 2003 prímszám, ezért $b=2003p^2$, $p \in \mathbb{N}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $a=2003q^2$, $q \in \mathbb{N}$ és az egyenlet $p+q=1$ alakú lesz, ahonnan $p=0$, $q=1$ vagy $p=1$, $q=0$.

Az egyenlet megoldásai $(x,y) \in \{(0,2003),(2003,0)\}$.

18.2. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^2+xy+y^2=x^2y^2z$ egyenletet.

(Suceava megyei verseny, VII.oszt.)

Megoldás. Észrevesszük, hogy ha $x=0$, akkor $y=0$, tehát $(0,0,n)$ megoldás bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Ha $xy \neq 0$, akkor az egyenletet xy-nal elosztva $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=xyz-1$ alakra hozzuk.

Ha $x,y \in \mathbb{N}^*$ és $x \neq y$, akkor $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \neq xyz-1$, mert $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \notin \mathbb{N}$ és $xyz-1 \in \mathbb{Z}$.

$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \in \mathbb{N}$ csak az $x=y=1$ esetben teljesül és ekkor $(1,1,3)$ az egyenlet megoldása.

Tehát a megoldások $(x,y,z) \in \{(1,1,3),(0,0,n) \mid \forall n \in \mathbb{N}\}$.

19. Ha az egyenletben elsőfokú kifejezések szorzata egy exponenciális kifejezéssel (hatvánnyal) egyenlő, akkor jelölések bevezetésével azonos alapú hatványok szorzatára írjuk át az elsőfokú kifejezések szorzatát.

19.1. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x(x+2)(x+8)=3^y$ egyenletet.

(Titu Andreescu)

Megoldás. Legyen $x=3^t$, $x+2=3^u$, $x+8=3^v$, ahol $t+u+v=y$.

Ezek alapján $\begin{cases} 3^u-3^t=2 \\ 3^v-3^t=8 \end{cases} \iff \begin{cases} 3^t(3^{u-t}-1)=2 \\ 3^t(3^{v-t}-1)=8 \end{cases}$, ahonnan következik $t=0$ és $\begin{cases} 3^u-1=2 \\ 3^v-1=8 \end{cases}$, azaz $u=1$ és $v=2$ és így $x=1$, $y=3$.

19.2. Ha p prím, akkor határozzuk meg az n,p,k természetes számokat úgy, hogy $n(n+1)=p^k$.

(Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Gazeta Matematică-B, 12/2007, E:13566)

Megoldás.

Mivel $n(n+1)$ páros szám, ezért p^k is páros szám. Az egyedüli páros prímszám a 2, ezért $p=2$ és az egyenlet így $n(n+1)=2^k$ alakú. Legyen $n=2^x$ és $n+1=2^y$, akkor $x+y=k$.

Az n és $n+1$ egymás utáni természetes számok, tehát az egyik páratlan, a másik páros, így vagy $x=0$ vagy $y=0$. Ha $x=0$, akkor $n=1$, $k=1$, $p=2$. Ha $y=0$, akkor ellentmondáshoz jutunk, mert $n=0$ és $0 \neq 2^k$. Tehát $n=1$, $p=2$, $k=1$.

20. A természetes számok halmazán megoldandó többismeretlenes egyenletek nagyon gazdag részterülete a 10-es számrendszerben írt számok adott feltételek melletti meghatározása (nem minden ilyen feladat igényel többismeretlenes egyenlet megoldást). Az előzőekhez hasonló módszerekkel dolgozunk, de itt csak 10 számjegy közül kell kiválasszuk a megfelelőeket, vigyázva arra, hogy az első számjegy ne legyen nulla. A cikk terjedelme miatt itt csak egyetlen példával kóstolunk bele e feladatcsoport szépségeibe.

20.1. Határozzuk meg az $\overline{ab}$ alakú számokat, ha tudjuk, hogy $\sqrt{\overline{ab}^2 - \overline{ba}} = (a+b)\sqrt{\dfrac{a+b}{3}}$.

(Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Cardinal, 1/2003-2004, G. 483., VII.)

Megoldás.

$\sqrt{(10a+b)^2 - (10b+a)} = (a+b)\sqrt{\dfrac{a+b}{3}}$, ahol $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

Négyzetre emelünk és rendezzük az egyenletet: $3(100a^2 + 20ab + b^2 - 10b - a) = (a+b)^3$. Mivel a bal oldal hárommal osztható következik, hogy $a+b$ is osztható 3-mal. Mivel a, b számjegyek, $a+b \neq 0$ és $a+b$ legnagyobb értéke 18, ezért $a+b = 3k$, ahol $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ahonnan $b = 3k - a$. Behelyettesítjük és egyszerűbb alakra hozunk: $81a^2 + 54ak + 9k^2 + 9a - 30k = 9k^3$. Az egyenlet jobb oldala osztható 9-cel, a bal oldalon is minden tag osztható 9-cel a $30k$ kivételével, következik $k \in \{3, 6\}$.

A $k = 3$ esetén $a = 1$ és $b = 8$; $k = 6$ esetén nincs megoldás. Tehát $\overline{ab} = 18$.