KÖZÉPÉRTÉKEK

Orbán György építész, Kolozsvár

Az építészettörténet jeles épületei, elsősorban templomok és különösen az 1584-ben befejezett római „Il Gesú” templomnak, a jezsuita rend alaptemplomának tervrajzait tanulmányozva és személyes méréseket is végezve, azt tapasztaltam, hogy az épületek belső terére jellemző különféle méretarányok matematikailag különböző középértékekkel fejezhetők ki. Több ilyen összefüggést matematikai formába öntöttem, s így bukkantam rá a különféle középarányosok szerepére és tulajdonságaira, melyek ismerete az építészettörténészek, az építészeti arány iránt érdeklődők és nem utolsó sorban a középiskolás diákok és tanárok számára is hasznos lehet.

A három klasszikus középérték

Két pozitív $x < y$ számot össze lehet hasonlítani abból a szempontból, hogy az egyik mennyivel nagyobb, mint a másik (ez az $y-x$ különbség), vagy az egyik hányszorosa a másiknak (ez az $\frac{y}{x}$ arány).

Természetesen tevődik fel a kérdés, hogy két adott $x < y$ valós szám esetén melyik az az m szám, melyre az $y - m = m - x$ vagy az $\frac{y}{m} = \frac{m}{x}$ egyenlőség teljesül.

Az első esetben ez az érték $m = \frac{x+y}{2} = A(x, y)$, melyet az x és y *számtani* (vagy *aritmetikai*) *középarányosának* (vagy *közepének*) nevezünk.

A második esetben ez az $m = \sqrt{xy} = G(x, y)$ szám, az x és y *mértani* (*geometriai*) *középarányosa* (*közepe*).

Ugyancsak logikus az $\frac{y-m}{y} = \frac{m-x}{x}$ aránypárból az m-et keresni.

A kapott $m = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = H(x, y)$ érték az x és y *harmonikus középarányosa.*

A pitagoreusok, sőt előttük a babilóniaiak is észrevették, hogy a kocka éleinek (e), lapjainak (l) és csúcsainak (cs) száma között a $cs = \frac{2le}{l+e}$ $\left(8 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6+12}\right)$ összefüggés igaz, és ugyanez teljesül más szabályos poliéder esetén is, vagyis a csúcsok száma az élek és lapok számának harmonikus középarányosa. *Íme a szabályos testekben rejlő harmónia, tükröződik a számok harmóniájában* – mondták már az ókorban.[1]

A pitagoreusok ismerték és használták az úgynevezett *arany aránypárt*:

$$x : \frac{x+y}{2} = \frac{2xy}{x+y} : y, \text{ azaz } x : A(x,y) = = H(x,y) : y.$$

A fenti három alapvető középarányos mértani szemléltetése igen egyszerű.

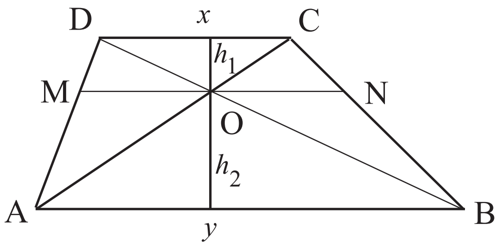
Az $A(x, y)$ számtani középarányos az egy egyenesen mért $AB = x$ és $BC = y$ szakaszok AC összege hosszának a felével egyenlő, vagy az x és y alappal rendelkező trapéz középvonalának a hossza.

A $G(x, y) = \sqrt{xy}$ mértani középarányost jellemző szakaszt megkapjuk, ha egy egyenesre felmérjük az $AB = x$, $BC = y$ szakaszt, megrajzoljuk az AC átmérőjű félkört, melyet a B-ben az AC-re állított merőleges D pontban metsz. A D-ben derékszögű DAC háromszög BD magasságának hossza (a magasságtétel értelmében) $BD = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{xy} = G(x, y)$.

[1] Sain, 1986, p. 82

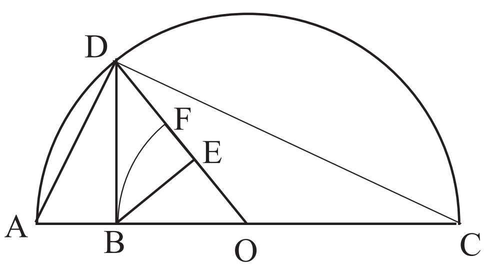
A $H(x,y)=\dfrac{2xy}{x+y}$ harmonikus középarányost úgy szemléltethetjük, hogy veszünk egy y nagyalapú és x kisalapú $ABCD$ trapézt ($AB=y$, $CD=x$). Az AC és BD átlók O metszéspontján keresztül az alapokkal párhuzamos egyenes az AD-t M, a BC-t N pontban metszi. Az MN szakasz hossza, $MN=\dfrac{2xy}{x+y}=H(x,y)$ az x és y harmonikus középarányosa lesz.

Bizonyítás:



Legyen h_1 és h_2 az OAB és ODC hasonló háromszögek magassága. Ekkor $\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{y}{x}$, $h_1+h_2=h$ a trapéz magassága, így $\dfrac{h_1}{h}=\dfrac{y}{x+y}$. $AMO\Delta\sim ADC\Delta\Rightarrow$ $\Rightarrow\dfrac{MO}{x}=\dfrac{h_1}{h}=\dfrac{y}{x+y}$. Innen $MO=\dfrac{xy}{x+y}$ és mivel minden trapézban $MO=ON$, következik, hogy $MN=2MO=\dfrac{2xy}{x+y}=H(x,y)$.

Még kifejezőbb, ha a három alapvető középarányost egy ábrán szemléltetjük.



Felmérjük egy egyenesre az $AB=x$ és $BC=y$ szakaszokat és az AC-re, mint átmérőre félkört rajzolunk. Legyen O ennek a középpontja. B-ben az AC-re emelt merőleges a félkört D-ben metszi. E-vel jelöljük a B-ből az OD-re bocsátott merőleges talppontját.

Ekkor $OC=OD=OA=\dfrac{x+y}{2}=A(x,y)$,

$BD=\sqrt{xy}=G(x,y)$ és $DE=\dfrac{2xy}{x+y}=H(x,y)$.

Ebből az első két összefüggés nyilvánvaló. A harmadikat megkapjuk, ha a B-ben derékszögű DBO háromszögben alkalmazzuk a befogó tételét: $BD^2=DE\cdot DO$, azaz $(\sqrt{xy})^2=DE\cdot\dfrac{x+y}{2}$, ahonnan $DE=\dfrac{2xy}{x+y}=H(x,y)$.

Az ábra nagy előnye, hogy nyilvánvalóvá teszi az $x<DE<BD<OC<y$ egyenlőtlenségeket. Az $AB<DE$ egyenlőtlenséget úgy igazoljuk, hogy meghúzzuk az O középpontú, OB sugarú kört, mely a DO szakaszt F-ben metszi. Ekkor $x=AB=DF<DE$.

Általánosan igazoltuk tehát az $x<H(x,y)<G(x,y)<A(x,y)<y$ egyenlőtlenségeket (külön-külön algebrai úton is igazolhatók).

Ezek az egyenlőtlenségek lehetővé teszik egy $a>0$ szám $\sqrt{a}$ négyzetgyökének tetszőleges pontossággal való kiszámítását.

Állítsuk elő az a számot $a=x_0y_0$ alakban ($x_0<y_0$). Ez mindig lehetséges, mert ha $a>1$ az $x_0=1$, $y_0=a$ megfelelő, ha $a<1$, akkor az $x_0=a$, $y_0=1$ eset a jó.

Ekkor $G(x,y)=\sqrt{a}$, $x_0<\sqrt{a}<y_0$, tehát $x_1:=H(x_0,y_0)<\sqrt{a}<A(x_0,y_0)=:y_1$.

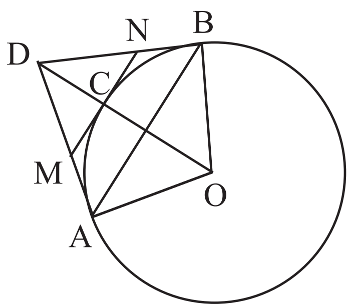
$x_1>x_0$, $y_1<y_0$ értékek a $\sqrt{a}$ jobb megközelítő értékei. Az eljárást folytatva legyen $x_{n+1}=H(x_n,y_n)$, $y_{n+1}=A(x_n,y_n)$. Ily módon kapunk egy növekvő $x_0<x_1<\ldots<x_n$ és egy csökkenő $y_0>y_1>\ldots>y_n$ sorozatot, ahol $x_i<y_k$, bármely $i,k\in\mathbb{N}$ esetén. Teljes indukcióval igazolható, hogy $y_{n+1}-x_{n+1}=\dfrac{y_n-x_n}{2^n}$. Ezért az x_n és y_n sorozatoknak ugyanaz a $\sqrt{a}$ szám a határértéke, ha $n\to\infty$.

Ezzel az eljárással a babilóniaiak (Kr.e. 2000 évvel) a csillagászati számításaikhoz szükséges $\sqrt{2}$-t nagy pontossággal határozták meg.[2]

Egy alkalmazás a harmonikus és mértani középarányosokkal

Legyen e_n az r sugarú körbe írt szabályos n oldalú sokszög oldalának hossza, u_n pedig ugyanezen kör köré írt szabályon n oldalú sokszög oldalának hossza, $E_n = ne_n$ és $U_n = nu_n$ ezen sokszögek kerülete. Arkhimédész a kör kerületét az $E_3 < E_6 < \ldots < E_{3n} < \ldots$ növekvő és az $U_3 > U_6 > \ldots > U_{3n} > \ldots$ csökkenő sorozatokkal két oldalról közelítette meg, és számította ki tetszőleges pontossággal.[3]

J. Gregory skót matematikus 1667-ben a kör kerületét harmonikus és mértani középértékekből álló sorozatokkal közelítette meg.



A mellékelt ábrán legyen $AB = e_n$ az O középpontú r sugarú körbe írt szabályos n oldalú sokszög oldalhossza, C az AB körív felezőpontja. Az A és B-ben a körhöz húzott érintők egymást D-ben, a C-ben húzott érintőt M és N pontban metszik. Könnyen belátható, hogy ha $AB = e_n$, akkor $AC = CB = e_{2n}$, $DA = DB = \frac{1}{2} \cdot u_{2n}$, $MN = u_{2n}$, $MC = CN = MA = \frac{1}{2} \cdot u_{2n}$.

Mivel $DAB\Delta \sim DMN\Delta$, így $\dfrac{e_n}{\frac{1}{2}u_n} = \dfrac{u_{2n}}{\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{2n}}$, a $CAB\Delta \sim MAC\Delta$ alapján pedig $\dfrac{e_n}{e_{2n}} = \dfrac{e_{2n}}{\frac{1}{2}u_{2n}}$. Ezért felírhatjuk, hogy $u_{2n} = \dfrac{e_n u_n}{e_n + u_n}$ és $e_{2n}^2 = \dfrac{1}{2} \cdot e_n u_n$. Mivel $E_n = ne_n$ és $U_n = nu_n$, következik, hogy $\dfrac{U_{2n}}{2n} = \dfrac{\frac{E_n}{n} \cdot \frac{U_n}{n}}{\frac{E_n}{n} + \frac{U_n}{n}}$, azaz $U_{2n} = \dfrac{2E_nU_n}{E_n + U_n} = H(E_n, U_n)$, továbbá $\left(\dfrac{E_{2n}}{2n}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{E_n}{n} \cdot \dfrac{U_{2n}}{2n}$, ahonnan $E_{2n} = \sqrt{E_nU_{2n}} = G(E_n, U_{2n})$. (Itt H a harmonikus, G a mértani középarányost jelöli.) E képletek rekurzíven határozzák meg az U_{2n} és E_{2n} sorozatokat. A középértékek közötti nagyságrendbeli relációk miatt írhatjuk, hogy:

$$E_n < H(E_n, U_n) = U_{2n} < A(E_n, U_n) < U_n,$$

ahol A a számtani középarányost jelöli. Tehát a kör kerülete (az U_{2n} sorozat határértéke) egy harmonikus középértékekből álló növekvő és egy számtani közepekből álló csökkenő sorozattal van megközelítve.

A kör kerületének ily módon való megközelítésének az előnye, a hagyományos archimédeszi megközelítéssel szemben az, hogy a megközelítő képletek nem tartalmaznak gyökvonásokat.

A Pitagoraszi középértékek

Ha $x \le m \le y$ három pozitív szám, akkor az x, y, $y - x$, $m - x$, $y - m$ számokból több olyan aránypár képezhető, melyek egy-egy m középértéket határoznak meg. Ezek táblázatban összefoglalva a következők [4]:

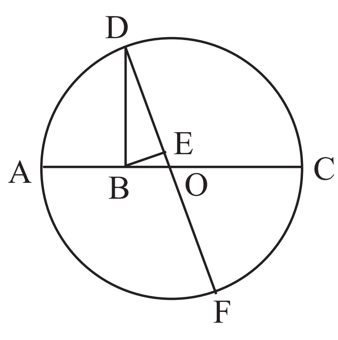
[2] Boyer 1991, 27 p. [47 p. PDF] és Hischer 2003VJM, 15-17pp. [17-19 pp. PDF]
[3] Sain 1986, 208-29 pp.
[4] Hischer 2003VJM, p.28

	meghatározó aránypár	középérték	elnevezés, jelölés	egy-egy példa egész számokban
1.	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{x}$	$m=\frac{x+y}{2}$	számtani közép $M_1(x,y)=A(x,y)$	$A(1,3)=2$
2.	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{x}$	$m=\sqrt{xy}$	mértani közép $M_2(x,y)=G(x,y)$	$G(1,3)=2$
3.	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{y}$	$m=\frac{2xy}{x+y}$	harmonikus közép $M_3(x,y)=H(x,y)$	$H(3,6)=4$
4.	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{y}{x}$	$m=\frac{x^2+y^2}{x+y}$	kontraharmonikus közép $M_4(x,y)$	$M_4(3,6)=5$
5.	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{m}{x}$	$m=\frac{y-x}{2}+\sqrt{\left(\frac{y-x}{2}\right)^2+x^2}$	1.kontramértani közép $M_5(x,y)$	$M_5(2,5)=4$
6.	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{y}{m}$	$m=-\frac{y-x}{2}+\sqrt{\left(\frac{y-x}{2}\right)^2+y^2}$	2.kontramértani közép $M_6(x,y)$	$M_6(1,6)=4$
7.	$\frac{y-x}{m-x}=\frac{y}{x}$	$m=y-\frac{(y-x)^2}{y}$	$M_7(x,y)$	$M_7(6,9)=8$
8.	$\frac{y-x}{y-m}=\frac{y}{x}$	$m=x+\frac{(y-x)^2}{y}$	$M_8(x,y)$	$M_8(6,9)=7$
9.	$\frac{y-x}{m-x}=\frac{m}{x}$	$m=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4xy-3x^2}$	$M_9(x,y)$	$M_9(4,7)=6$
10.	$\frac{y-x}{y-m}=\frac{m}{x}$	$m=\max\{y-x,x\}$	$M_{10}(x,y)$	$M_{10}(3,8)=5$
11.	$\frac{y-x}{y-m}=\frac{y}{m}$	$m=\frac{y^2}{2y-x}$	$M_{11}(x,y)$	$M_{11}(3,6)=4$

Ezekkel részletesebben Horst Hischer foglalkozott, M. Cantor (1894) és C.B. Boyer (1968) nyomán, aki a fenti egyenletek egész számú megoldásait is meghatározta. Érdemes megjegyezni, hogy az ókorban tíz középértéket Nicomachus [5], vele azonos kilencet Pappus [6] is ismert és még egyet, így összesítve mind a 11 középértéket ismerték.

Egy épület megépítésének egyik legfontosabb (és a terepen első) lépése, az épület kitűzése, geometriájának megszerkesztése. Ez az eljárás egyszerű és közérthető kellett legyen, a kivitelezésben használatos madzag (körző) és léc (vonalzó) segítségével elvégezhető. Az első három, klasszikus középérték esetében ezt a kérdést már tárgyaltuk.

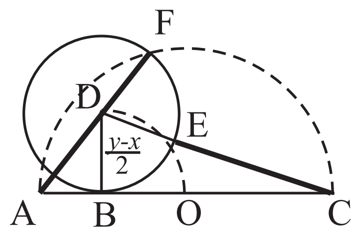
Vizsgáljuk meg, hogy a többi esetben mi a geometriai kép, azaz hogyan lehet az x és y $(x<y)$ hosszúságú szakaszokból az illető középértéket megszerkeszteni.



A 4. kontraharmonikusnak nevezett középérték $m=\frac{x^2+y^2}{x+y}=$
$=\frac{(x+y)^2-2xy}{x+y}=x+y-\frac{2xy}{x+y}=x+y-H(x,y).$
Innen adódik az alábbi szerkesztés: egy egyenesre felmérjük az $x=AB$, $y=BC$ szakaszt $(x<y)$, az AC-re, mint átmérőre O középpontú kört szerkesztünk, melyet B-ben az AC-re emelt merőleges D-ben metsz. Legyen E a B-ből OD-re bocsátott merőleges talppontja, F pedig az OD egyenes második metszéspontja a körrel. Az előzőekben láttuk, hogy $DE=\frac{2xy}{x+y}$. DF viszont ugyancsak a kör átmérője, így $DF=AC=x+y$,

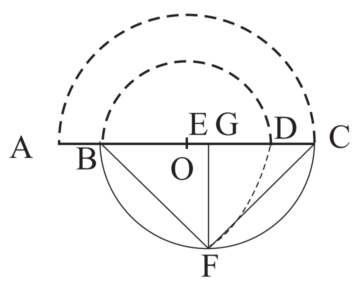
[5] Nicomachus II.XVIII.
[6] Pappus III. in: Heath 1921vI, p.87 [PDF:p.100]

így pedig $EF = DF - DE = x + y - H(x,y)$, azaz a keresett középarányos.



Az $M_5 = \dfrac{y-x}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{y-x}{2}\right)^2 + x^2}$, illetve $M_6 = -\dfrac{y-x}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{y-x}{2}\right)^2 + y^2}$ középarányosok szerkesztéséhez felvesszük egy egyenesen az $AB = x$ és a $BC = y$ szakaszt, B-ben BC-re emelt merőlegesre felmérjük a $BD = BO = BC - OC = y - A(x,y) = \dfrac{y-x}{2}$ szakaszt. A D középpontú $DB = \dfrac{y-x}{2}$ sugarú kört a DC egyenes az E, DA egyenes az F pontban metszi. Ekkor $M_5 = AF$ és $M_6 = CE$ lesz. A bizonyítás az ábra alapján azonnali.

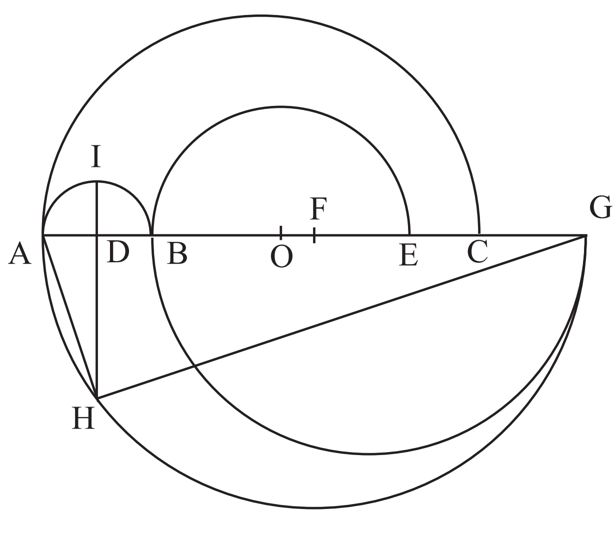
A táblázat 7. és 8. helyén álló középarányosok az őket meghatározó aránypárokból könnyen megszerkeszthetők. Ugyanis ha x és y adott, ezeknek az aránypároknak 3-3 tagja ismert, így a negyedik tagot – az $(m-x)$-et, illetve az $(y-m)$-et – a közismert eljárással (a negyedik arányos szerkesztése) meghatározhatjuk és abból az m is megkapható.



Egy másik szerkesztés szerint egy egyenesre felmérjük az $x = AB$, $y = BC$ szakaszt ($x < y$). A fentiekhez hasonlóan: $DO = OB = BC - OC = y - A(x,y) = \dfrac{y-x}{2}$, így $BD = y - x$. A $BC = y$ szakaszra mint átmérőre E középponttal egy kört szerkesztünk, melyet a B középpontú és $BD = y - x$ sugarú kör F pontban metsz. Legyen G, az F pontból a BC egyenesre bocsátott merőleges talppontja. Ekkor $M_7 = GC$ és $M_8 = AG$ lesznek a keresett 7. és 8. középarányosok.

Bizonyítás: A szerkesztés alapján BCF derékszögű háromszögben $BF = BD = y - x$. A befogó tétele alapján $BF^2 = BG \cdot BC$, vagyis $BG = \dfrac{BF^2}{BC} = \dfrac{(y-x)^2}{y}$, ekkor

$$GC = BC - BG = y - \frac{(y-x)^2}{y} = M_7 \text{ és } AG = AB + BG = x + \frac{(y-x)^2}{y} = M_8.$$

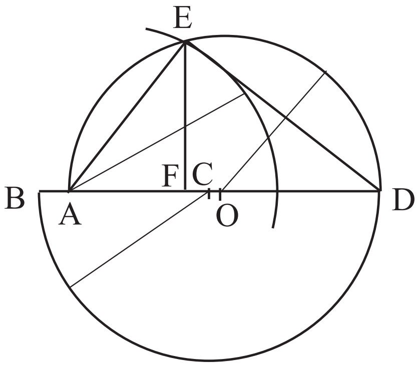


A 9. középérték megszerkesztéséhez egy egyenesre felmérjük az $x = AB$, $y = BC$ szakaszt ($x < y$), D pont az AB szakasz felezőpontja, így $AD = DB = \dfrac{x}{2}$. Az O középpontú OB sugarú kör az AC egyenest E-ben metszi. Ekkor $EC = AB$ és így $BE = BC - EC = y - x$. Az E középponttal és BE sugárral szerkesztett kör az AC egyenest G pontban metszi. Ekkor $BG = 2BE = 2y - 2x$ és $DG = BG + BD = 2y - 2x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{4y-3x}{2}$.

Az AG szakaszra mint átfogóra F középponttal kört szerkesztünk, melyet a D pontban az AG-re állított merőleges H pontban metsz. Az AHG derékszögű háromszögben a magasság tétele alapján $DH = \sqrt{AD \cdot DG} = \sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{4y-3x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4xy-3x^2}$. A D középpontú $AD = \frac{x}{2}$ sugarú kört a DH egyenes az I pontban metszi. Ezért

$$HI = HD + DI = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4xy - 3x^2} = M_9.$$

A 10. középérték szerkesztése nem igényel magyarázatot.

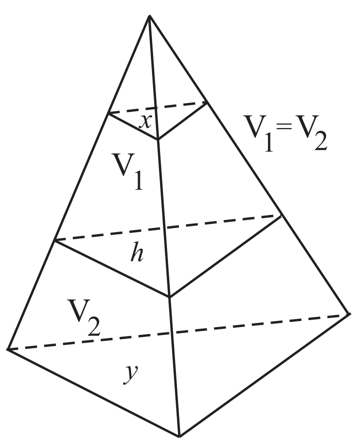


A 11. középérték megszerkesztéséhez egy egyenesre közös B kezdőponttal felmérjük az $x = BA$, $y = BC = CD$ szakaszt ($x < y$). Az $AD = BD - BA = 2y - x$ szakaszra mint átmérőre megszerkesztjük az O középpontú $OA = \frac{AD}{2} = \frac{2y-x}{2}$ sugarú kört, melyet az A középpontú és $BC = y$ sugarú kör E pontban metsz. Az AED derékszögű háromszögben így $AE = y$, a befogó tétele alapján pedig $AE = \sqrt{AF \cdot AD}$, ahonnan $AF = \frac{AE^2}{AD} = \frac{y^2}{2y-x} = M_{11}$.

Más középértékek

Heron középérték

Ha x és y két pozitív szám, akkor a $h = \frac{x + \sqrt{xy} + y}{3}$ számot *Heron-féle középértéknek* nevezik.



Mértani jelentés: ha x és y egy csonka gúla két alapjának területe, akkor h az alapokkal párhuzamos azon síkmetszet területe, mely a gúlát két egyenlő térfogatú testre bontja fel. Howard Eves [7] szerint a Heron féle közepet már Kr.e. 1800 előtt ismerték. A Moszkvai papiruszon szerepel egy probléma (14. számú), melyben numerikus feladatként egy piramisépítésnél használatos, elvégzett számítás van leírva. A csonka gúla térfogatának meghatározására leírt képlet a síkbeli trapézanalógia alapján, tapasztalati és intuitív módon alakult ki. A trapéz területének meghatározására az alapok számtani középarányosa volt megfelelő. A térbeli analógia szerint, a csonka gúla alapjainak számtani közepe nem adott helyes eredményt (Ó-Babiloni analógia), az egyiptomiak azonban empirikus matematikai szemléletük szerint eljutottak a helyes formulához, ami alapján a Heron féle középpel pontosan meg tudták határozni a csonka gúlák térfogatát. Eric Temple Bell szerint ez az indukció nagyobb eredménye az egyiptomiaknak mint a piramisaik, a maguk fizikai valóságában, és így a Heron-féle közép felfedezését a legnagyobb egyiptomi piramisnak nevezte.

Négyzetes középérték

Ha x és y két valós szám, az $r = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ számot az x és y *négyzetes középértékének* nevezik.

Mértani jelentés: ha x és y egy trapéz két alapjának a hossza, akkor r annak az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amely a trapézt két egyenlő területű részre osztja fel.

Más jelentés: Az x és y befogójú derékszögű háromszögben az átfogóval egyenlő átlójú négyzet oldalának a hossza.

[7] Howard 1983, pp.11-13.

Centroid középérték

Ha x és y két pozitív szám, akkor $g = \dfrac{2(x^2+xy+y^2)}{3(x+y)}$ számot az x és y *centroid középértékének* nevezik. Mértani jelentése az x és y alapokkal rendelkező trapéz súlypontján átmenő, az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapézba eső szakasza.

Nagyságrend a középértékek között

Ha $H = \dfrac{2xy}{x+y}$ harmonikus, $G = \sqrt{xy}$ mértani, $h = \dfrac{x+\sqrt{xy}+y}{3}$ Heron-féle, $A = \dfrac{x+y}{2}$ számtani, $g = \dfrac{2(x^2+xy+y^2)}{3(x+y)}$ centroid, $r = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ négyzetes és $c = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ kontraharmonikus középérték, akkor $H < G < h < A < g < r < c$.

SZAKIRODALOM

[1.] *Boyer, Carl B.*: A History of Mathematics, New York, John Wiley & Sons, 1991

[2.] *Hischer, Horst*: Viertausend Jahre Mittelwertbildung, Eine fundamentale Idee der Mathematik und didaktische Implikationen, In: mathematica didactica 25 (2002)2, 3 51. – Als Preprint Nr. 98 in der Preprint-Reihe der Fachrichtung Mathematik der Universität des Saarlandes erschienen, dort eingereicht am 04. November 2003., http://hischer.de/uds/forsch/publikat/hischer/ (11.05.2012)

[3.] *Howard, Eves*: Great, Moments In Mathematics.Before 1650, The Mathematical Association of America,1983

[4.] *Nicomachus, Martin Luther D'Ooge, Frank Egleston Robbins, and Louis Charles Karpinski*: Introduction to Arithmetic, New York, Macmillan Co, 1926

[5.] *Heath, Thomas Little*: A History of Greek Mathematics vol I. , Oxford, The Clarendon Press, 1921

[6.] *Sain Márton*: Nincs királyi út!, Budapest, Gondolat Kiadó, 1986