ELHIBÁZOTT MEGOLDÁSOK

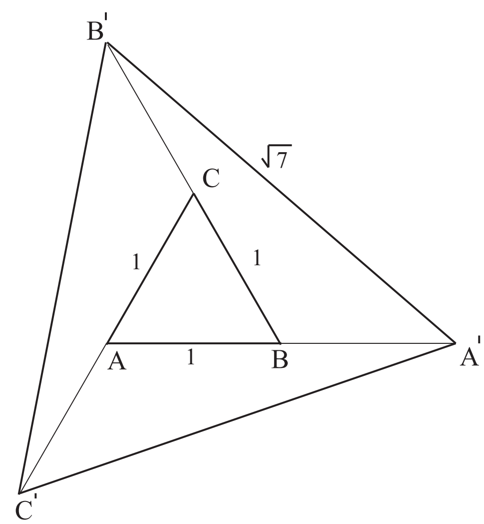
Róka Sándor docens, Nyíregyháza

Néha előfordul, hogy egy feladatot hibásan oldunk meg, sőt az is előfordul, hogy a „hivatalos” megoldás hibás. Maga a feladat is lehet hibás. Jól emlékszem a következő példákra, mert több esetben a rossz megoldást én adtam, és csak jóval később jöttem rá – vagy valaki megmondta –, hogy hibás a megoldás. Számomra ezek sok tanulsággal jártak, ezért szeretnék bemutatni néhányat közülük.

1. *Az $ABCD$ szabályos tetraéder A csúcsát B-re, B csúcsát C-re, C csúcsát D-re, D csúcsát A-ra tükröztük. Az így kapott pontok egy másik tetraéder csúcsait alkotják. Mekkora a két tetraéder térfogatának aránya?*

Megoldás. A feladat megoldását segítheti, ha ismerjük egy hasonló feladat megoldását. A síkbeli, analóg feladat a következő:

1.1. *Az ABC szabályos háromszög A csúcsát B-re, B csúcsát C-re, C csúcsát A-ra tükröztük. Az így kapott pontok egy másik háromszög csúcsait alkotják. Mekkora a két háromszög területének aránya?*



Gyorsan megadható a válasz. A tükrözések után kapott A', B', C' pontok szintén egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai. Ha $AB = BC = CA = 1$, akkor koszinusztétellel számolva kapjuk, hogy $A'B' = \sqrt{7}$. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak, a hasonlóság aránya $1 : \sqrt{7}$, a hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, azaz $1 : 7$. Tehát a tükrözések után kapott háromszög területe 7-szerese az eredeti háromszög területének.

Az $ABCD$ szabályos tetraéder A csúcsát B-re, B csúcsát C-re, C csúcsát D-re, D csúcsát A-ra tükröztük, az így kapott pontok A', B', C', D'. Az $A'B'C'D'$ tetraéder szintén szabályos, így hasonló az eredetihez, és hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő.

Az előbbi ábrán látjuk a tetraéder $A'B'$ élét, így a két tetraéder térfogatának aránya $\left(\frac{\sqrt{7}}{1}\right)^3 = 7 \cdot \sqrt{7} = 18,52.$

Megjegyzések: Valójában az új tetraéder térfogata 15-szöröse az eredeti tetraéder térfogatának.

Mi az oka az eltérésnek? A tükrözés után kapott tetraéder nem lesz szabályos. Térben nem öröklődik a szabályosság.

Az 1. feladatot 1989-ben tűzték ki a KöMaL pontversenyében (Gy.2517., 258. oldal).

A beérkezett megoldások $\frac{3}{4}$-e abból a hibás feltevésből indult ki, hogy ha az eredeti tetraéder szabályos volt, akkor a tükrözés után kapott is szabályos lesz, azaz úgy oldották meg a feladatot, ahogyan az előbb olvashattuk.

2007-ben hasonló feladatot tűztek ki a KöMaL-ban (B.3927.), a feladat tetszőleges tetraéderre kérdezte, hogy ha a csúcsok tükrözéseit elvégezzük, mennyi lesz a két test térfogatának aránya.

2010. decemberében a matematika OKTV III. kategóriában az első forduló ötödik feladata is ezt a kérdéskört vizsgálja. Az érdeklődő olvasó megtalálja ezt az interneten. (A Google keresőbe beírjuk: „igaz-e, hogy ha a tükörképek alkotta háromszög szabályos", akkor az első két találat hozza a feladatlapot és a megoldást.)

2. *Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első* 13 *eleme* $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$. *Tudjuk, hogy* $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{13}=2$ *és* $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{13}}=1$. *Mennyi* $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{13}$ *értéke?*

Megoldás: Tudjuk, hogy egy mértani sorozat $2k+1$ számú egymást követő elemének szorzata a középső elem $2k+1$-edik hatványa. Például $a_1\cdot a_2\cdot a_3=a_2^3$, és $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{13}=a_7^{13}$.

Ha a sorozat hányadosa q, akkor

$$a_1(1+q+q^2+\ldots+q^{12})=2, \text{ és } \frac{1}{a_1}\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{12}}\right)=1.$$

Ez utóbbit tovább alakítva: $\frac{1}{a_1}\cdot\frac{q^{12}+q^{11}+\ldots+q+1}{q^{12}}=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{\frac{2}{a_1}}{q^{12}}=\frac{2}{a_1^2\cdot q^{12}}$, azaz $a_1\cdot q^6=\sqrt{2}$. (Itt használtuk, hogy a sorozat elemei pozitív számok.)

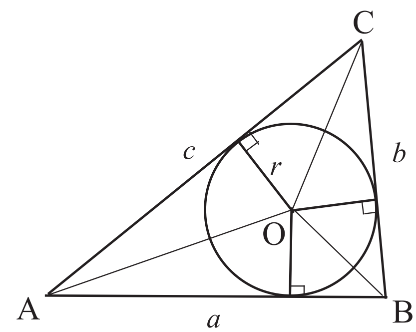
Mivel $a_7=a_1\cdot q^6$, így ${a_7}^{13}=(\sqrt{2})^{13}=64\sqrt{2}$. Tehát $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{13}=64\sqrt{2}$.

Megjegyzések: Ebben az esetben nem a megoldással van baj, hanem a feladattal.

Tudjuk, ha a pozitív szám, akkor $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

Tehát $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{13})+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{13}}\right)\geq 13\cdot 2=26$, de a feladat feltételei szerint a bal oldal értéke 3. Tehát nincs olyan sorozat, amely teljesíti a feltételeket.

3. *Egy háromszög területe* 7 *területegység, kerülete* 12 *egység. Mekkora a beírt kör sugara?*



Megoldás. Az ismert összefüggést használjuk: $T=rp$, ahol T a háromszög területe, p a kerület fele, r a beírt kör sugara. Ez igaz állítás. Ha az ABC háromszögbe írt kör középpontja O, akkor a háromszög területe az ABO, BCO, CAO háromszögek területének összege, azaz

$$T=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=r\cdot\frac{a+b+c}{2}=rp.$$

Esetünkben $T=7$, $p=\frac{12}{2}=6$, így $7=r\cdot 6$, azaz $r=\frac{7}{6}$ egység.

Megjegyzések: Hol a hiba? Nincs olyan háromszög, amelynek a területe 7 területegység, a kerülete 12 egység. Gondoljunk arra, hogy adott kerület esetén a háromszög területe akkor a legnagyobb, ha a háromszög szabályos. Ha egy háromszög kerülete 12 egység, akkor a területe legfeljebb akkora, amekkora a 4 egység oldalú szabályos háromszög területe, azaz $4\cdot\sqrt{3}\approx 6,92$, tehát ilyen kerület mellett nem lehet a háromszög területe 7 területegység.

4. *Az a, b, c, d pozitív egész számokra $ab + cd = 37$, $ac + bd = 34$, $ad + bc = 43$. Mennyi $a + b + c + d$ értéke?*

Megoldás: A második és harmadik egyenlőség összege: $a(c + d) + b(c + d) = 77 \iff$ $\iff (a + b)(c + d) = 7 \cdot 11$, ezért $a + b$ és $c + d$ értékei 7 és 11. Így $a + b + c + d = 7 + 11 = 18$.

Megjegyzések: Trükkös, szép megoldást láttunk. Az a probléma, hogy nincsenek olyan egész számok, amelyre teljesülnek a feladat feltételei. Ezt láthatjuk, ha megvizsgáljuk az $a+b = 7$ és $c+d = 11$ egyenletek megoldásait a pozitív egész számok halmazán, közöttük nincs olyan, amelyre $ab + cd = 37$ teljesül.

Ne feledkezzünk meg a kapott megoldás ellenőrzéséről!

5. *Bizonyítsuk be, hogy* $3 \mid (2^n + 3^n + 5^n)$, *ha* $n \in \mathbb{N}$.

Megoldás: Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 0$ esetén igaz, mert $2^0 + 3^0 + 5^0 = 1+1+1 = 3$. Ha igaz valamely k-ra az állítás, akkor $(k+1)$-re is igaz, mivel $2^{k+1} + 3^{k+1} + 5^{k+1} = 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k + 5 \cdot 5^k = 2(2^k + 3^k + 5^k) + 3^k + 3 \cdot 5^k$, és ennek a kifejezésnek 3 osztója, mert ez utóbbi összeg első tagja az indukciós feltevés kétszerese, és ez osztható 3-mal, a következő tagok pedig 3 többszörösei.

Megjegyzések: Hibás a bizonyítás, és hamis az állítás is. Hol a hiba?

A teljes indukciós bizonyítás szokásos technikáját használtuk. Ott hibázunk, amikor az indukciós lépésben a $2(2^k + 3^k + 5^k) + 3^k + 3 \cdot 5^k$ összeg tagjairól állítjuk, hogy 3-mal osztható. Az indukciós feltevést $k = 0$ esetén néztük meg, de az indukciós lépés hibás, mert $3^0 = 1$ nem osztható 3-mal.

6. *Négy különböző számjegyből összerakjuk a lehetséges legnagyobb és legkisebb négyjegyű számot. A két szám összege a)* 10560 *vagy b)* 10477. *Melyek lehetnek ezek a számok?*

Megoldás: a) A négy különböző számjegy: $a < b < c < d$. A feltételek szerint: $\overline{dcba} + \overline{abcd} = 10560$, azaz $1001(a+d) + 110(b+c) = 10560$. A bal oldal osztható 11-gyel: $91(a+d) + 10(b+c) = 960$. Ekkor $91(a + d)$ osztható 10-zel, tehát $a + d = 10$. Ezután kapjuk, hogy $b + c = 5$. Tekintettel a kiinduló egyenlőtlenségekre: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 9$. Valóban: $9321 + 1239 = 10560$.

b) Az egyenlet jobb oldala változott: $\overline{dcba} + \overline{abcd} = 10477$, azaz $1001(a + d) + 110(b + c) = 10477$. A bal oldal osztható 11-gyel, a jobb oldal nem. Tehát nincs megoldás. (Ez nem meglepő. Nyilván nem mindegy, milyen számot adunk meg a két szám összegeként, csak néhány esetben van megoldás.)

Megjegyzések: Mit néztünk el, mit hibáztunk?

A b) feladatnak is van megoldása. Miért?

Két lehetőséget kell vizsgálni a feladat szövege alapján, és mi csak az egyiket néztük meg. A két lehetőség: a négy számjegy között nem szerepel a nulla (ezt néztük), vagy az egyik számjegy a nulla.

A második esetben az összeg: $\overline{dcb0} + \overline{b0cd} = 10477$. Ennek megoldása: $7430 + 3047 = 10477$.

Az a) feladat megoldása is hiányos, hiszen ott is meg kell vizsgálni azt a lehetőséget, ha a négy számjegy egyike a nulla.

7. *Mennyi a* $2 \cdot \sqrt{10^{20} - (10^{10} - 2 \cdot 10^{-10})^2}$ *kifejezés értéke egészre kerekítve?*

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Gordiusz döntő, 9. osztályosok versenye, 2003

Megjegyzések: Rövid számolással az (E) választ kapjuk. A feladatot azért tartom érdekesnek, mert a diákok általában nem szeretnek papíron vagy fejben számolni, még egyszerű számításokat is számológépen végeznek el. Ha ezt a számolást számológéppel végzik, a gép a hibás 0 eredményt adja. Tanulságos lehet diákokkal megbeszélni ezt a feladatot.

Láthatjuk, hogy a hibázások egyik oka a figyelmetlenség, vagy nem nézünk meg minden lehetőséget, illetve gyakori hiba az, ha elmarad az ellenőrzés. Más okok is lehetnek. Előfordul, hogy a helyes következtetés ellenkezik a megszokásainkkal, a várakozásainkkal.

A *Monty Hall-probléma* egy tévés vetélkedő miatt lett népszerű, nevét a műsorvezetőről kapta. (A műsor magyar változatának címe Zsákbamacska volt, és Rózsa György vezette.) A játékosnak mutatnak három csukott ajtót, amelyek közül kettő mögött egy-egy kecske van, a harmadik mögött viszont egy vadonatúj autó. A játékos nyereménye az, ami az általa kiválasztott ajtó mögött van. Azonban a választás meg van egy kicsit bonyolítva. Először a játékos csak rámutat az egyik ajtóra, de mielőtt valóban kinyitná, a műsorvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, amelyik mögött nem az autó van (a játékvezető tudja, melyik ajtó mögött mi van), majd megkérdezi a játékost, hogy akar-e módosítani a választásán. A játékos ezután vagy változtat, vagy nem, végül kinyílik az így kiválasztott ajtó, mögötte a nyereménnyel.

A kérdés az, hogy érdemes-e változtatni, illetve hogy számít-e ez egyáltalán. Erdős Pálnak is elmesélték ezt a feladványt. Erdős azt mondta (amit sok más matematikus is), hogy nem kell változtatni, mert az nem befolyásolja az esélyeket. És ez a hibás válasz! Erdőst, és másokat is nagyon nehéz volt meggyőzni arról, hogy érdemes változtatni.

Egyszerű eszközökkel megmutatható, hogy igen, mindig érdemes váltani, ez azonban annyira ellentmond a józan észnek, hogy nehéz elfogadni. Talán épp azoknak nehéz ezt elfogadni, akik jártasak a valószínűségszámításban. Ők tudják azt, hogy a feldobott pénzérmének nincs emlékezete, és így a következő dobás eredménye független az előző eredményektől. Itt is az események függetlenségének fogalma okozhatja azt a hitet, hogy nem érdemes változtatni az eredeti döntésen.

Miért érdemes mégis változtatni a kiválasztott ajtón?

Nézzük meg, mi történik, ha a játékos az 1-es ajtót választja, és kitart a döntése mellett.

1-es ajtó	2-es ajtó	3-as ajtó	Eredmény
Autó	Kecske	Kecske	Nyert
Kecske	Autó	Kecske	Vesztett
Kecske	Kecske	Autó	Vesztett

Tehát, ha a játékos nem változtat a döntésén, akkor a nyerésnek $\frac{1}{3}$ az esélye. Mi történik, ha a játékos az 1-es ajtót választja, és megváltoztatja döntését?

1-es ajtó	2-es ajtó	3-as ajtó	Eredmény
Autó	Kecske	Kecske	Vesztett
Kecske	Autó	Kecske	Nyert
Kecske	Kecske	Autó	Nyert

Ha a játékos megváltoztatja a döntését, akkor a nyerésnek $\frac{2}{3}$ az esélye.

Láthatjuk, ha megváltoztatjuk a döntésünket, akkor kétszeresére növeljük a nyerési esélyeinket. Ezt a játékot diákokkal is játszhatjuk, nem feltétlen kell hozzá kecske és autó.

A továbbiakban következzen még egy játék, még egy *példa* arra, hogy a várakozásaink mennyire eltérnek egyes események bekövetkezésének valós esélyeitől. A gondolkodásunk itt is hibás úton jár.

Varga Tamás (aki számtalan jó ötlettel gazdagította a közép- és általános iskolai matematikatanítást) általános iskolások valószínűségszámítás-oktatását a következő kísérlettel szokta kezdeni. (Ezt Révész Pál 1982-es akadémiai székfoglalója alapján fogom ismertetni.)

Az osztályt két részre osztja, az egyik csoportban minden gyereknek egy pénzdarabot kell (mondjuk) kétszázszor feldobnia és leírnia egy papírra a dobások eredményeit. A második csoportban a gyerekeknek pénzdobás nélkül kell előállítaniuk egy 200 hosszúságú „véletlen” fej-írás sorozatot. A kísérlet elvégzése után a gyerekeknek a papírokra egy-egy jelszót kell felírniuk. Így a papírosokat összeszedő tanár nem tudja, melyik papírszelet jött az igazi, és melyik az álvéletlen csoportból. Ennek ellenére kevés hibával képes megállapítani a kapott fej-írás sorozatok eredetét.

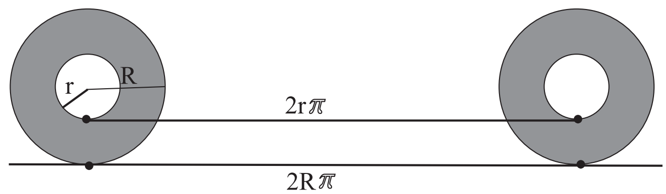
A kísérlet általában jó eredménnyel végződik, a tanár az eseteknek csak mintegy 10 százalékában téved. Mondanunk sem kell, hogy a gyerekeket a sikeres „bűvészmutatvány” nagy lelkesedéssel szokta eltölteni.

Varga Tamás ezen sikeres mutatványa a következő egyszerű észrevételen alapszik. Az a gyerek, aki mesterségesen próbál meg egy véletlen sorozatot gyártani, félni fog túl sok fejet (vagy írást) írni egymás után, úgy gondolja, hogy 3-4 fej után okvetlenül írásnak kell következnie. A pénzdarabok „memóriája” nem ilyen jó, egy 200 hosszúságú igazán véletlen fej-írás sorozatban 6-7 hosszúságú tiszta fej-blokk is elő szokott fordulni. Ennek alapján Varga Tamás döntési eljárása a következő: azokról a fej-írás sorozatokról mondja, hogy igazi véletlen sorozatok, amelyekben a leghosszabb csak fejet tartalmazó blokk hossza 5-nél hosszabb. Ez az eljárás szolgáltatja az említett sikeres eredményt.

Arisztotelész kereke. Nézzünk egy ókori példát is, ahol nyilvánvaló, hogy hibás az okoskodás, hiszen lehetetlen következtetésre jutunk, de nem könnyű megtalálni a hibát.

Állítás: Bármely két kör sugara egyenlő.

Bizonyítás: Az ábrán látjuk egy autónak a kerekét, a dísztárcsával együtt. A kerék megtesz egy fordulatot, és a dísztárcsa is egyet fordul.



A kerék által megtett út $2R\pi$, a dísztárcsa is ugyanekkora úton gördül végig, és ennek a hossza $2r\pi$. Mivel $2R\pi = 2r\pi$, így $R = r$.

A probléma vizsgálatával Galilei is foglalkozott.

Hol a hiba? Ennek megtalálását az Olvasóra bízom.

A következő példát Pósa Lajostól hallottam, egy a Rátz László Vándorgyűlésen tartott előadásán.

8. a) *Legalább hány fős az az osztály, ahol biztosan van olyan hónap, amely hónapban legalább három diák ünnepli a születésnapját?*

b) *Legalább hány fős az az osztály, ahol biztosan van két olyan hónap, mely hónapokban legalább* $3-3$ *diák ünnepli a születésnapját?*

Megoldás. Az a) esetben 25 a válasz. Ha egyik hónapban sem ünnepli 3 diák a születésnapját, akkor a diákok száma legfeljebb $12\cdot 2 = 24$, de 25-en vannak, tehát valamelyik hónaphoz legalább 3 diáknak kell tartoznia.

Látható, ha minden hónapban csak 2-2 diák született, akkor még nem teljesül a várt állítás, de veszünk még egy diákot, így lesznek 25-en, akkor már lesz olyan hónap, amelyben legalább hárman ünneplik születésnapjukat.

A b) esetben is minden hónaphoz válasszunk 2-2 diákot, ez eddig 24 diák, és még két diákkal növelve a létszámot lesz két olyan hónap, amelyekben 3-3 diák ünnepli a születésnapját.

Megjegyzések: Az a) esetben jó választ adtunk, a b) esetben nem. Ennek meggondolását az Olvasóra bízom.

Más az élmény, ha saját magunk oldjuk meg a feladatot (netán hibásan), mint ha elmondják nekünk a megoldást. Az itt következő teszt-feladatokhoz a helyes választ megadom, de nem írom le a megoldást. A feladatok többsége a Zrínyi Ilona Matematikaversenyről való. A feladatoknál van olyan hibás válaszlehetőség, amit a megoldók nagy eséllyel választanak. Olvassuk el figyelmesen a feladatok szövegét!

1. Most 278 Ft-om van. Hány forintomnak kell lennie ahhoz, hogy megvehessek egy 865 Ft árú könyvet?

(A) 187 (B) 413 (C) 587 (D) 787 (E) 865

2. Egy 100 oldalas könyvből elolvastam 20 oldalt. Hány lap van még hátra?

(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80 (E) 160

3. Három autóról leszerelik az első rendszámtáblát. Hányféleképp lehet úgy visszarakni a három táblát, hogy pontosan két tábla kerüljön az eredeti helyére?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 6

4. Aprajafalván futóversenyt rendeztek. A döntőbe csak hárman jutottak: Törpilla, Törperdész és Ügyi. A döntőben volt holtverseny, de csak egy helyen. Hányféle sorrendben érhettek célba versenyzők a döntőben?

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 9

5. Egy jégbarlang bejáratától öt úton juthatunk el az első terembe, innen hat út vezet a másodikba, majd innen három út a harmadikba. Hányféle úton juthatunk el az első teremből a harmadik terembe?

(A) 3 (B) 5 (C) 18 (D) 30 (E) 90

6. Egy háromjegyű pozitív egész szám számjegyeinek összege legyen x, az x számjegyeinek összege pedig y. Mennyi az y lehető legnagyobb értéke?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 18

7. Mennyi a számjegyek összege abban a legkisebb hatjegyű pozitív páros számban, amelynek minden számjegye különböző?

(A) 15 (B) 16 (C) 20 (D) 21 (E) 22

8. Felírtuk a legnagyobb olyan hatjegyű számot, amelyben a négy legnagyobb helyiértéken álló számjegy mindegyike legalább akkora, mint a nála kisebb helyiértéken álló számjegyek szorzata. Mennyi ebben a számban a számjegyek összege?

(A) 14 (B) 22 (C) 45 (D) 46 (E) 54

9. Egy háromjegyű pozitív egész számhoz hozzáadjuk a számjegyei összegét, így olyan számot kapunk, amelynek számjegyei egyenlők. Ha a háromjegyű számból kivonjuk a számjegyei összegét, akkor is olyan számot kapunk, amelynek számjegyei egyenlők. Hány ilyen háromjegyű pozitív egész szám van?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 9

10. A mozi utolsó sora 12 székből áll, és néhány szék foglalt. Legtöbb hány foglalt szék lehet, ha minden szék mellett van üres szék is?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

11. Mennyi lehet a legtöbb közös pontja egy háromszög és egy négyszög kerületének, ha nincs olyan oldaluk, ami ugyanarra az egyenesre illeszkedik?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10

12. Döntsétek el, hogy az állítások közül melyik igaz, melyik hamis.

a) Ha az a, b, c egész számokra $a+b$ és $b+c$ osztható 2-vel, akkor $a+c$ is osztható 2-vel.

b) Ha az a, b, c egész számokra $a+b$ és $b+c$ osztható 3-mal, akkor $a+c$ is osztható 3-mal.

c) Ha az a, b, c egész számokra $a-b$ és $b-c$ osztható 2-vel, akkor $a-c$ is osztható 2-vel.

d) Ha az a, b, c egész számokra $a-b$ és $b-c$ osztható 3-mal, akkor $a-c$ is osztható 3-mal.

e) Ha az a, b, c egész számokra ab és bc négyzetszám, akkor ac is négyzetszám.

f) Ha az a, b, c egész számokra ab és bc páros, akkor ac is páros.

Ezen hat állítás között hány igaz állítás van?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Válaszok:

1. (E) 865 2. (B) 40 3. (A) 0 4. (D) 7 5. (C) 18 6. (B) 10
7. (B) 16 8. (C) 45 9. (B) 1 10. (C) 6 11. (D) 8 12. (C) 3