A TEVESZABÁLY ÉS ALKALMAZÁSAI

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

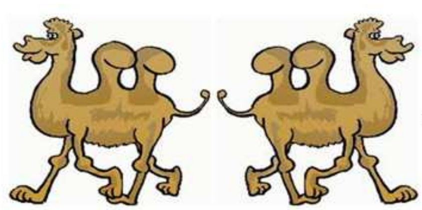
A matematikában létezik egy olyan szabály, amit humorosan *teveszabálynak* neveznek. Ez, mint látni fogjuk, amilyen egyszerű, éppen olyan hasznos.

Mielőtt megmondanánk, hogy miből áll ez a szabály és alkalmaznánk, rávilágítunk az eredetére. Nézzük a következő mesés történetet:

Egy öreg, arab kereskedőnek van 3 *fia és* 19 *tevéje. Amikor meghal az öreg, a végrendeletében tevéinek felét a legidősebb fiára, negyedét a középsőre, és ötödét a legkisebbre hagyta. Már a* 19 *teve felezésénél megakadtak a fiúk, mivel nem akartak tevét ölni.* (*Egy fél tevével nehéz zsákokat cipeltetni.*) *Gondolkoztak keményen, de nem tudták megoldani a problémát. Arra tevegelt egy irgalmas szamaritánus, aki egyből látta, hogy valami nagy gond szakadt a srácokra. Megkérdezte, majd nevetve közölte, hogy mi sem egyszerűbb ennél. Fogta a saját tevéjét és bevezette a* 19 *teve közé. Így* 20 *teve lett. Majd szólt a legidősebb fiúnak, hogy vigye el a tevék felét* (10)*, a középső a negyedét* (5)*, végül a legkisebb a tevék ötödét* (4)*, és mivel* $10+5+4=19$*, ezért utolsó lépésként fogta a sajátját és tovatevegelt...*

Az osztozkodás megtörtént, úgy tűnik, hogy még a végrendeletet is betartották, vagy mégsem? Hát persze, hogy nem, hiszen a 19 teve fele az mégis csak $19\cdot\frac{1}{2}=9,5$ és nem 10, a negyede az $19\cdot\frac{1}{4}=4,75$ és nem 5, és az ötöde $19\cdot\frac{1}{5}=3,8$ és nem 4. A fiúk ellenben örvendhettek, mert a tevék feldarabolásával nem volt vérontás.

Annak ellenére, hogy a feladat „megoldása” nem helyes, mégis van belőle egy roppant egyszerű tanulság: *a szamaritánus hozott egy tevét, majd a végén elvitte azt.*

$+1$  -1

Hogy ez a tény mire jó? Nézzük a következő matematikatörténeti feladatot:

1. *Volt egyszer Indiában egy Shehrán nevű király, aki mindeneken uralkodott, csak saját unalmán nem. Reggel, délben, este, egész nap, folyton csak unatkozott. Annyira unta magát, hogy végül is belebetegedett az unalomba. Ágynak dőlt, felakadt a szeme, mintha haldoklana. Sessa ebn Daher, az udvari bölcs, megsajnálta urát, és hogy unalmát elűzze, feltalált egy játékot, a sakkot.*

Ez a játék csodát művelt. Alig játszotta le a király az első játszmát, máris felépült.

– Mit kívánsz jutalmul? – kérdezte Shehrán.

– Tégy a sakktábla első kockájára egy búzaszemet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet és így tovább, minden kockára kétszer annyit, amennyi az előtte lévőn volt – mondta Sessa ebn Daher.

– Amennyire a búzaszemek száma a duplázás folytán a 64 négyzetre nő, annyi búzaszem legyen a jutalmam.

– Szerény kérés! – mosolygott a király. – Beszéded mindazonáltal rejtvényesnek hat ...

– Fejtsd meg a rejtvényt és megtudod, hogy találmányom megfizethetetlen! – válaszolt a bölcs még rejtélyesebben.

Shehrán erre előhívatta tudósait, hogy oldják meg a talányt. Azok neki is álltak és kiszámították, hogy ha a kérést teljesíteni akarnák, akkor hány búzaszemet kellene adjanak. Számítsuk ki, mennyi ez.

Megoldás: Hamar belátjuk, hogy az összes búzaszem száma $x = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$.

Sok feladat megoldásánál találkozunk azzal az ötlettel, hogy egy kifejezéshez adjunk hozzá valamit és vonjuk is ki ugyanazt, ezzel ugyanis nem változik a kifejezés értéke, akárcsak az előbbi történetben a tevékkel (*teveszabály*).

A kiszámítandó összeghez adjunk hozzá 1-et és vonjunk is ki 1-et. Rendre ezt kapjuk:

$x = 1+2+2^2+\ldots+2^{63} = 1+1+2+2^2+\ldots+2^{63}-1 = 2+2+4+8+\ldots+2^{63}-1 =$ $= 8+8+16+\ldots+2^{63}-1 = \ldots$, és végül azt kapjuk, hogy $x = 2^{63}+2^{63}-1 = 2\cdot 2^{63}-1 = 2^{64}-1$.

Egy másik megoldás – ugyancsak *teveszabállyal* – az, hogy átírjuk 2-es számrendszerbe, ott elvégezzük a műveletet, majd az eredményt visszaírjuk a 10-es számrendszerbe:

$$x = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = \underbrace{\overline{111\ldots11}_2}_{\text{64 db}} = \underbrace{\overline{111\ldots11}_2}_{\text{64 db}} + 1 - 1 = \overline{1\underbrace{00\ldots0}_{\text{64 db}}}_2 - 1 = 2^{64} - 1.$$

Mindkét esetben $x = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ búzaszem adódik, azaz 18 trillió 446 744 billió 73 709 millió 551 ezer 615 búzaszemet kellene Sessa ebn Dahernek adniuk, olyan hatalmas mennyiségű gabonát, amellyel 9 mm vastagon beboríthatnák az egész földgolyót. Tehát a találmány valóban megfizethetetlen.

Ez az alkalmazott ötlet, amilyen egyszerű, olyan nagyszerű, mert a matematikában a feladatok megoldása során nagyon sokszor alkalmazzuk azt, hogy egy adott kifejezéshez hozzáadjuk és kivonjuk ugyanazt a mennyiséget (vagy fordított sorrendben). Ezt az egyszerű eljárást hívják *teveszabálynak*.

A továbbiakban egy egész csokor olyan feladatot mutatunk be, amelyet a *teveszabály* nélkül talán meg sem tudnánk oldani. Ilyen típusú feladatok a matematika minden területén, és az 5.-12. osztályos matematikai tevékenység során mindenütt fellelhetők.

2. *Miért nem lehet az $a = 1234^{5678} + 8765^{4321}$ szám prímszám?*

Megoldás: Hozzuk máris a tevét, vagyis adjunk hozzá 1-et és vonjunk is ki 1-et. Ekkor $a = 1234^{5678} + 8765^{4321} + 1 - 1 = 1234^{5678} - 1 + 8765^{4321} + 1$. Mivel $x^n - y^n = \mathcal{M}(x-y)$, ezért $1234^{5678} - 1 = \mathcal{M}(1234-1) = \mathcal{M}1233 = \mathcal{M}9$, és mivel $x^{2n+1} + y^{2n+1} = \mathcal{M}(x+y)$, ezért $8765^{4321} + 1 = \mathcal{M}(8765+1) = \mathcal{M}8766 = \mathcal{M}9$, tehát $a = \mathcal{M}9$.

3. *Ha $a, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, igazoljuk, hogy $(a^n - 1) \vdots (a-1)^2 \iff n \vdots (a-1)$.*

Megoldás: $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a+1)$, és nyilvánvalóan $(a^n-1) \vdots (a-1)$. Elegendő és szükséges is igazolni, hogy $(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1) \vdots (a-1)$. Most egy egész tevekaravánra lesz szükségünk. Felírhatók a következők: $a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a+1 =$ $= (a^{n-1}-1)+(a^{n-2}-1)+(a^{n-3}-1)+\ldots+(a-1)+(1-1)+n\cdot 1 = \mathcal{M}(a-1)+\mathcal{M}(a-1)+$ $+\mathcal{M}(a-1)+\ldots+\mathcal{M}(a-1)+n = \mathcal{M}(a-1)+n$, így $(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a+1) \vdots (a-1)$, tehát $n \vdots (a-1)$.

4. *Határozzuk meg azokat a p, q pozitív egész számokat, amelyekre az $a = 4^p + 6^q$ osztható 10-zel.*

Megoldás: Az a szám páros, ezért osztható 2-vel. Továbbá az $x^n - y^n = \mathcal{M}(x-y)$ összefüggésben az $x = a+b$ és $y = b$ választással $(a+b)^n = \mathcal{M}a + b^n$, minden $a, b \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor $6^q = (6-1+1)^q = (5+1)^q = \mathcal{M}5+1$, és hasonlóan $4^p = (4+1-1)^p = (5-1)^p = \mathcal{M}5+(-1)^p$, tehát $a = \mathcal{M}5 + (-1)^p + 1$, és ez csak akkor többszöröse 5-nek, ha p páros szám, q pedig tetszőleges pozitív egész szám.

5. *Igazoljuk, hogy az $E = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ szám osztható 7-tel.*

Megoldás: Ezúttal egy teve nem is lesz elég. Nézzük a következőket:
$E = 2222^{5555} + 5555^{2222} = 2222^{5555} + 4^{5555} - 4^{5555} + 5555^{2222} + 4^{2222} - 4^{2222} =$
$= (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222}) = a + b - c$. Látható, hogy $a = 2222^{5555} + 4^{5555} = \mathcal{M}(2222+4) = \mathcal{M}2226 = \mathcal{M}7$, továbbá $b = 5555^{2222} - 4^{2222} = \mathcal{M}(5555-4) = \mathcal{M}5551 = \mathcal{M}7$, és $c = 4^{5555} - 4^{2222} = 4^{2222}(4^{3333}-1) = 4^{2222}(64^{1111}-1) = \mathcal{M}(64-1) = \mathcal{M}7$, tehát $E = a + b - c = \mathcal{M}7$.

6. *Igazoljuk, hogy az 10101 szám minden számrendszerben osztható 111-gyel.*

Megoldás: Mivel $\overline{10101}_x = x^4 + x^2 + 1$ és $\overline{111}_x = x^2 + x + 1$, ezért azt kellene igazolni, hogy $(x^4 + x^2 + 1) \vdots (x^2 + x + 1)$. Most van szükség a tevére! Felírhatjuk, hogy: $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

7. *Miért nem lehet az $n^4 + 64$ prímszám, egyetlen $n \in \mathbb{N}$ esetén sem?*

Megoldás: Máris hozzuk a tevét! Felírható, hogy: $n^4 + 64 = n^4 + 64 + 16n^2 - 16n^2 = (n^2+8)^2 - (4n)^2 = (n^2+4n+8)(n^2-4n+8)$, és egyik szorzótényező sem egyenlő 1-gyel.

8. *Írjuk fel az* $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; x = \dfrac{4n}{n+2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ *halmazt.*

Megoldás.

Újból szükségünk van a tevére. Felírható, hogy $x = \dfrac{4n}{n+2} = \dfrac{4n+8-8}{n+2} = 4 - \dfrac{8}{n+2} \in \mathbb{N}$, ha $n+2 \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$, ahonnan a természetes számok $n \in \{0, 2, 6\}$, tehát $A = \{0, 2, 3\}$.

9. *Számítsuk ki az* $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$ *összeget, ha* $n \in \mathbb{N}$.

Megoldás: Megint szükségünk van egy tevére. Mivel $k \cdot k! = (k+1-1)k! = (k+1)k! - k!$, ezért $S = (2!-1!) + (3!-2!) + \ldots + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1$.

Megjegyzés: Teljesen hasonlóan számolható ki a következő összeg is: $S = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$.

10. *Igazoljuk, hogy minden x, y valós számra igaz a $||x| - |y|| \leq |x - y|$ egyenlőtlenség.*

Megoldás.

Bizonyítani kell, hogy $-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$, vagyis $|x| \leq |x-y| + |y|$ (1) és $|y| \leq |x| + |x-y|$ (2). Ekkor hozzuk a tevéket. A háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy $|x| = |(x+y) - y| \leq |x-y| + |y|$, illetve $|y| = |(y-x) + x| \leq |x| + |x-y|$, ezzel az (1) és a (2) bizonyított.

11. *Legyen az $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ két olyan valós számokból álló sorozat, amelyre $|a_{n+1} - a_n| \leq b_{n+1} - b_n$ bármely $n \geq \mathbb{N}^*$ esetén. Igazoljuk, hogy akkor minden $n, k \in \mathbb{N}^*$ esetén igaz az $|a_{n+k} - a_n| \leq |b_{n+k} - b_n|$ egyenlőtlenség.*

Megoldás: Ezúttal egy egész tevekaravánt kell hoznunk. Ugyancsak a háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy:

$|a_{n+k}-a_n| = |(a_{n+k}-a_{n+k-1})+(a_{n+k-1}-a_{n+k-2})+(a_{n+k-2}-a_{n+k-3})+\ldots+(a_{n+1}-a_n)| \leq$
$\leq |a_{n+k}-a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1}-a_{n+k-2}| + |a_{n+k-2}-a_{n+k-3}| + \ldots + |a_{n+1}-a_n| \leq$
$\leq (b_{n+k}-b_{n+k-1})+(b_{n+k-1}-b_{n+k-2})+(b_{n+k-2}-b_{n+k-3})+\ldots+(b_{n+1}-b_n) = b_{n+k}-b_n \leq |b_{n+k}-b_n|$.

12. *Hozzuk kanonikus alakra az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvényt, ahol a, b és c valós számok, a nem nulla.*

Megoldás: Most is szükségünk lesz egy furcsa tevére. Megpróbálunk erőltetve teljes négyzetet kialakítani: $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{c}{a}\right)=$

$$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a},\text{ ahol }\Delta=b^2-4ac.$$

13. *Egyszerűsítsük a $T=\dfrac{\sin 2x}{\sin x+\cos x+1}$ törtet.*

Megoldás.

Ezúttal eléggé álcázott tevére lesz szükség. Rendre felírható, hogy: $\sin 2x=\sin 2x+1-1=$ $=2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x-1=(\sin x+\cos x)^2-1=(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)$.

Tehát $T=\dfrac{(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)}{\sin x+\cos x+1}=\sin x+\cos x-1$.

14. *Legyen $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív számokból álló sorozat. Igazoljuk, hogy*

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)}<1.$$

Megoldás: Máris hozzuk a tevét. Felírható, hogy $\dfrac{x_k}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)}=$

$$=\frac{x_k+1-1}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)}=\frac{1+x_k}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)}-\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)}=$$

$$=\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{k-1})}-\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)}=a_{k-1}-a_k.$$

Ezért $S=1-\dfrac{1}{1+x_1}+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(a_{k-1}-a_k)=1-a_n=1-\dfrac{1}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)}<1$.

15. *Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számokból álló számsorozat teljesíti a következő rekurziós összefüggést: $x_{n+1}=2x_n+1$ és $x_1=\alpha>0$. Keressük meg az általános tagot megadó képletet.*

Megoldás:

Megint szükségünk van a tevére. Végezzük el a következő műveleteket: $x_{n+1}=2x_n+1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_{n+1}=2(x_n+1-1)+1\Leftrightarrow x_{n+1}=2(x_n+1)-1\Leftrightarrow x_{n+1}+1=2(x_n+1)$. Vezessük be most az $x_k+1=y_k$ jelölést minden $k\in\mathbb{N}^*$ esetén. Ekkor $x_{n+1}+1=2(x_n+1)\Leftrightarrow y_{n+1}=2y_n$, ahonnan $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}=2$, ezért $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{y_{k+1}}{y_k}=\prod_{k=1}^{n-1}2\Leftrightarrow\frac{y_n}{y_1}=2^{n-1}\Leftrightarrow y_n=y_1\cdot 2^{n-1}\Leftrightarrow x_n+1=(x_1+1)\cdot 2^{n-1}$, ahonnan $x_n=(\alpha+1)\cdot 2^{n-1}-1$, minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a teveszabállyal az $x_{n+1}=ax_n+b$, ahol $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a\neq 1$ általánosabb alakú elsőrendű lineáris rekurzió általános képlete is meghatározható, ha úgy keressük az α valós számot, hogy $x_{n+1}+\alpha=a(x_n+\alpha)$ legyen, ahonnan $\alpha=\dfrac{b}{a-1}$.

16. *Számítsuk ki*: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

Megoldás: A feladat aligha oldható meg teveszabály nélkül, és a teve választása sem könnyű. Mivel $\sin(x+\pi) = -\sin x$, ezért felírható, hogy $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi + n\pi\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi(\sqrt{n^2+n} - n)\right) = \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

17. *Számítsuk ki*: $L = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$.

Megoldás: Most nagyon jól felhasználható az, hogy a teve jön is, meg megy is. Rendre felírható, hogy: $L = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} + 1 - 1) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[(\sqrt[n]{3}-1) - (\sqrt[n]{2}-1)\right] = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3}-1) - \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1) = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

18. *Számítsuk ki*: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$.

Megoldás. Teve nélkül nem is indíthatjuk el a feladatmegoldást. A feladatot az e számra kell visszavezetni: $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}}{2} - 1\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2}{2}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2}}\right]^{\frac{n(\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2)}{2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2)}{2}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3}-1) + \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)} = e^{\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2} = e^{\frac{1}{2}\ln(3\cdot 2)} = e^{\ln\sqrt{3\cdot 2}} = \sqrt{6}.$$

Megjegyzés: Majdnem minden e számmal megoldható feladatnál alkalmaznunk kell a teveszabályt, ugyanis mindig 1-gyel kell kezdődjön a képlet, ezért kell hozzáadni majd kivonni 1-et.

19. *A l'Hospital szabály nélkül számítsuk ki*: $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x-1}$.

Megoldás. Itt is egy tevére lesz szükség. Figyelembe véve, hogy $\sin(x+\pi) = -\sin x$, felírható, hogy $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x - \pi + \pi)}{x-1} = -\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi(x-1))}{x-1} = -\pi$.

20. *Számítsuk ki*: $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}$.

Megoldás. Megint jól átgondolt tevére lesz szükség. Rendre felírhatjuk, hogy:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x + \cos x - \cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x) - \cos x(1-\cos 2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} - \lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

21. *Vezessük le a tört deriválási szabályát, vagyis a következő képletet:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Megoldás: Ezúttal nagy szükségünk van egy jó tevére. Rendre felírható, hogy:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x_0)\right] =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

22. *Számítsuk ki a következő integrált*: $I = \displaystyle\int \frac{3x^2 - 2}{4x^2 + 1}\mathrm{d}x.$

Megoldás

$$I = \int \frac{3x^2-2}{4x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{3x^2}{4x^2+1}\mathrm{d}x - \int \frac{2}{4x^2+1}\mathrm{d}x = 3\int \frac{x^2}{4x^2+1}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{4x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$= 3I_1 - 2I_2$. Most az első integrálban egy jól választott tevére van szükség.

$$I_1 = \int \frac{x^2}{4x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x^2}{4x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x^2+1-1}{4x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4x^2+1}{4x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{4x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{4x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}I_2.$$

Tehát $I = 3I_1 - 2I_2 = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{11}{4}\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+1}\mathrm{d}x = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{11}{8}\mathrm{arctg}(2x) + \mathcal{C}.$

23. *Számítsuk ki*: $I = \displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x.$

Megoldás: Vegyük észre, hogy az integrál alatti függvény elemi tört, tehát nem lehet tovább bontani. Észrevesszük, hogy $(x^2+2x+2)' = 2x+2$. Ebből kifolyólag szükségünk van egy életmentő tevére. Felírható, hogy: $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \mathrm{arctg}(x+1) + \mathcal{C}.$$

Reméljük, hogy a kiválasztott feladatok kellően sokszínűek, változatosak, érdekesek és tanulságosak voltak. Továbbá elgondolkozhatunk azon, hogy amíg a teve bekötése, a számolások elvégzése és a teve elvitele a feladatnak egy hibás megoldásához vezetett, addig a megoldott feladatok során ugyanazon mennyiség hozzáadása és elvétele mégis helyes matematikai számításokhoz vezetett. Érdekes, nem?