A LEHETETLENSÉGRE VISSZAVEZETÉS MÓDSZERE
(A reductio ad absurdum módszere)

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Ezt a módszert akkor alkalmazzuk, amikor könnyebb bizonyítani egy állítás ellentettjét, mint a direkt állítást.

A módszer az indirekt bizonyítások közé tartozik, és tulajdonképpen azokkal egyenértékű. Egy feladat vagy tétel általában $A \Rightarrow B$ alakú, ahol A a feltevés (hipotézis) és B a következmény (konklúzió). Mivel fennáll az $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$ azonosság, ezért nem azt bizonyítjuk, hogy A-ból levezethető B, hanem feltételezzük, hogy B nem igaz, vagyis $\neg B$ igaz, és ebből helyes logikai következtetéseket végezve, *ellentmondásra* jutunk. Ellentmondásba kerülhetünk a kiinduló feltétellel, az A-val, vagy valamelyik ismert tétellel, vagy valamelyik axiómával.

A *reductio ad absurdum* módszer lényege tehát: feltételezzük, hogy a konklúzió nem igaz, és helyes következtetéseket végezve, *ellentmondásra* jutunk. Ez azt jelenti, hogy a feltételezésünk, hogy *B nem igaz* megdől, vagyis $\neg B$ hamis, tehát a B konklúzió igaz kell legyen. Ezzel a bizonyítás véget ért.

A következőkben néhány példán keresztül mutatjuk be a módszert.

1. példa. *Legyen a, b, c, d négy különböző szám. Igazoljuk, hogy nem alkotható velük egy 2×2-es bűvös négyzet.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy alkotható velük egy bűvös négyzet, amint az ábrán látható.

a	b
c	d

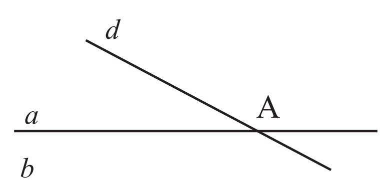
Mivel ez bűvös négyzet, következik, hogy $a+b = c+d = a+c = = b+d = a+d = b+c$, ahonnan mindenképpen következik, hogy $b = c$ vagy $a = b$ vagy $a = c$ vagy $a = d$ vagy $b = d$, tehát ellentmondásba kerültünk azzal, hogy a, b, c, d különböző számok. Ezúttal a feltevéssel jutottunk ellentmondásra.

2. példa. *Bizonyítsuk be, hogy egy konvex hatszögnek nem lehet négy hegyesszöge.*

Bizonyítás. Ismert tétel, hogy egy n-oldalú sokszög belső szögeinek az összege $(n-2)\cdot 180°$, így a külső szögeinek összege $2 \cdot 180° = 360°$. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy egy konvex hatszögnek van négy hegyesszöge. Akkor az ezek mellett fekvő külső szögek összege nagyobb, mint $360°$, de ez ellentmond az említett tételnek. Ezúttal egy tétellel jutottunk ellentmondásra.

3. példa. *Igazoljuk, hogy ha a síkban egy d egyenes két párhuzamos a és b egyenesek közül metszi az egyiket (például az a-t), akkor metszi a másikat is.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy d nem metszi a b egyenest. Ekkor $d \parallel b$. De így az A ponton át a b egyeneshez két párhuzamos húzható, ami ellentmond a párhuzamossági axiómának. Ezúttal egy axiómával jutottunk ellentmondásra.



A következőkben, a módszer jobb megértése és elmélyítése céljából bemutatunk néhány megoldott feladatot, a gimnáziumi és a középiskolai elemi matematika köréből.

1. *Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.*

1. *Bizonyítás.* Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám. Ekkor léteznek olyan $(p,q)=1$ pozitív egész számok, amelyekre $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, ahonnan $2q^2=p^2$, tehát p páros szám. Legyen $p=2r$, ahol r természetes szám. Visszaírva kapjuk, hogy $q^2=2r^2$. Ebből következik, hogy q is páros szám. Legyen $q=2s$, ekkor $(p,q)=(2r,2s)=1$, ami ellentmondás.

2. *Bizonyítás.* Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám. Ekkor léteznek olyan p, q pozitív egész számok, amelyekre $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. Az ilyen létező p és q számok közül legyen p a legkisebb ami létezik. Fennáll a $2q^2=p^2$ feltétel, tehát p páros szám, vagyis $p=2r$, ahol r természetes szám, és $r<p$, ami ellentmond annak, hogy p a legkisebb.

2. *Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nem racionális szám.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$.

Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy $5+2\sqrt{6}=\frac{p^2}{q^2} \iff \sqrt{6}=\frac{m}{n}$, vagyis $\sqrt{6}$ racionális szám, de az előző bizonyítások mintájára igazolható, hogy ez nem igaz.

3. *Két csoportra oszthatók-e a $-7,-4,-2,3,5,9,10,18,21,33$ számok úgy, hogy az egyik csoportba tartozó számok összege* 9*-cel nagyobb legyen, mint a másik csoportba tartozók összege*?

Megoldás. Feltételezzük, hogy a két csoportba osztás megvalósítható. Ez azt jelenti, hogy ha elhagyjuk a 9-es számot, a többi szám összegének a fele egész szám, de ez nem így van, mert az összeg 77, ami páratlan.

4. *Van-e olyan kétjegyű szám, amelynek legalább négy különböző prímosztója van*?

Megoldás. Feltételezzük, hogy van ilyen szám. Akkor a négy legkisebb prímszám 2, 3, 5 és 7. Ellenben $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$ már nem kétjegyű, hanem háromjegyű szám.

5. *Lehet-e három egymást követő pozitív egész szám összege prímszám*?

Megoldás. Feltételezzük, hogy a válasz igenlő, vagyis van három olyan egymás utáni pozitív egész szám, amelyeknek az összege prímszám. Mivel a három szám egymás utáni, ezért az alakjuk valamilyen sorrendben $3k$, $3k+1$ és $3k+2$. De ha ezt a három számot összeadjuk, akkor egy 3-mal osztható összetett számot kapunk, vagyis nem prímszámot.

6. *Van-e olyan tízes számrendszerbeli pozitív egész szám, amelyben a számjegyek szorzata* 9900?

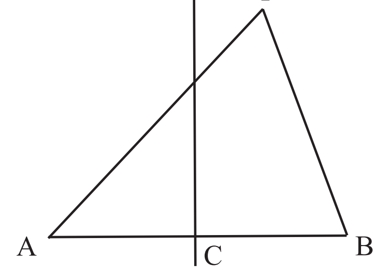
Megoldás. Feltételezzük, hogy van ilyen szám. Mivel $9900=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11$, azt kapjuk, hogy 11 számjegy, ami ellentmondás.

7. *Három egymást követő prímszámot akkor nevezünk hármasikernek, ha a szomszédok közötti különbség* 2*. Hány ilyen hármasiker prímszám van*?

Megoldás. Könnyen belátható, hogy 3, 5, 7 éppen egy ilyen prím hármasiker. Igazoljuk, hogy nincs több ilyen. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy létezik olyan p prímszám, amelyre p, $p+2$ és $p+4$ mind prímszámok. Mivel $p>3$, ezért $p=3k+1$ vagy $p=3k+2$ alakú lehet, de ekkor vagy $p+2$ vagy $p+3$ osztható 3-mal, vagyis nem prímszám, tehát ellentmondáshoz jutottunk.

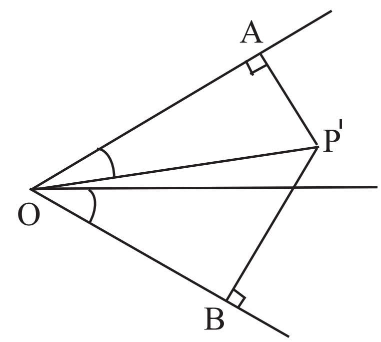
8. *Igazoljuk, hogy az AB szakasz felezőmerőlegesén kívül nincs a síkban olyan P pont, amelyre $PA=PB$.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, a szakasz felezőmerőlegesén kívül is van olyan P' pont, amelyre $P'A = P'B$. Ez azt jelenti, hogy az ABP' háromszög egyenlő szárú. Ha C az AB szakasz felezőpontja, akkor mivel $AC = CB$ és $AP' = P'B$ és $P'C$ közös, ezért $ACP'\Delta \equiv BCP'\Delta$, így $\widehat{ACP'} \equiv \widehat{BCP'}$, ami azt jelenti, hogy a két szög mindegyikének mértéke $90°$, vagyis $P'C$ merőleges az AB-re, ami azt jelenti, hogy P' a szakaszfelező merőlegesen van, ami ellentmondás.



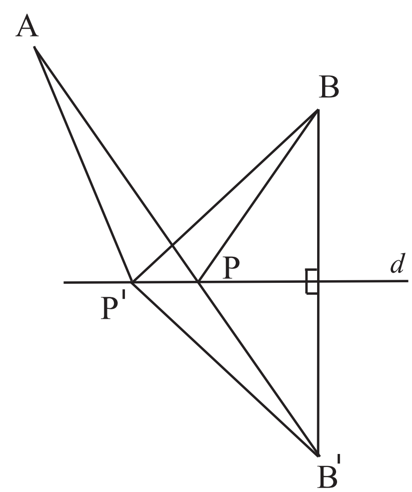
9. *Igazoljuk, hogy az $\widehat{AOB}$ szögfelezőjén kívül nincsen olyan P pont amelyre*
$$d(P, OA) = d(P, OB).$$

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy a szögfelezőn kívül is van olyan P' pont amelyre $d(P', OA) = d(P', OB)$. Ekkor Pitagorasz tétele értelmében $OA = OB$, így $OAP'\Delta \equiv OBP'\Delta$, ezért $\widehat{AOP'} \equiv \widehat{BOP'}$, ami azt jelentené, hogy a P' pont éppen az $\widehat{AOB}$ szögfelezőjén van, ez ellentmondás.



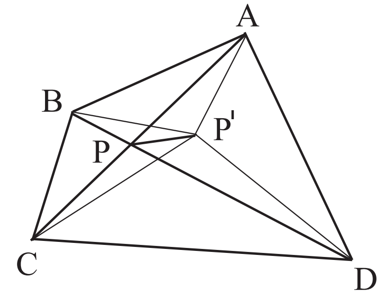
10. *Adott a síkban egy d egyenes, és ennek ugyanazon az oldalán két különböző A és B pont. Keressük meg a d egyenes azon P pontját, amelyre a $PA + PB$ összeg minimális.*

Megoldás. Tükrözzük a B pontot a d egyenesre, legyen B' a B pont szimmetrikusa. Az AB' egyenes a d egyenest P pontban metszi. Ekkor $PA + PB = PA + PB' = AB'$. Igazoljuk, hogy ez a P pont, amelyre a szóban forgó összeg a legkisebb. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy létezik olyan P' pont a d egyenesen, amelyre $P'A + P'B < PA + PB$. A háromszög egyenlőtlenség alapján $P'A + P'B = P'A + P'B' > AB' = AP + PB' = PA + PB$, vagyis ellentmondáshoz jutottunk.



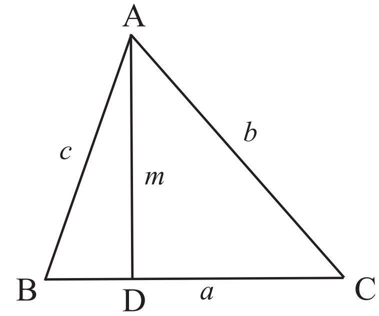
11. *Az $ABCD$ konvex négyszög belsejében keressük meg azt a P pontot, amelyre a $PA + PB + PC + PD$ összeg minimális.*

Megoldás. Igazolni fogjuk, hogy a keresett P pont éppen az AC és BD átlók metszéspontja. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy az átlók metszéspontján kívül létezik olyan P' pont, amelyre $P'A + P'B + P'C + P'D < PA + PB + PC + PD$. A háromszög-egyenlőtlenség alapján írható, hogy $P'A + P'C > AC = PA + PC$ és $P'B + P'D > BD = PB + PD$, ezek összegzéséből adódik, hogy $P'A + P'B + P'C + P'D > PA + PB + PC + PD$ és ez ellentmondás.



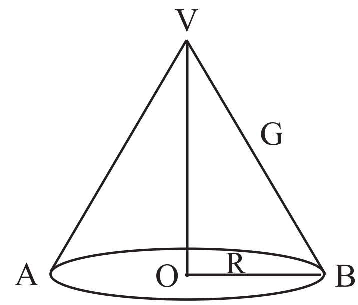
12. *Van-e olyan háromszög, amelynek minden magassága nagyobb, mint 2 cm, a területe pedig kisebb, mint 2 cm²?*

Megoldás. Feltételezzük, hogy van ilyen háromszög, a háromszög oldalait jelöljük a csúcsoknak megfelelő kisbetűkkel. Mivel $T = \dfrac{am}{2} \Rightarrow am = 2T < 4$. Ezért $4 > am > 2a$, ahonnan $a < 2$. Hasonlóan következik, hogy $b < 2$ és $c < 2$. Az ABD derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb, mint a befogó, ezért $c > m$, de $2 > c$, így $2 > m$, ellentmondáshoz jutottunk.



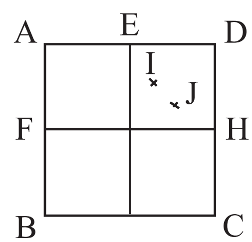
13. *Igazoljuk, hogy nincs olyan egyenes körkúp, amelynél az alap területe egyenlő a palást területével.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy létezik ilyen körkúp. Az alap területe $T = \pi R^2$, a palást területe pedig $P = \pi RG$, ezért $T = P$ alapján $\pi R^2 = \pi RG$, ahonnan $R = G$ adódik, vagyis egy derékszögű háromszög befogója és átfogója egyenlő, ami ellentmondás.

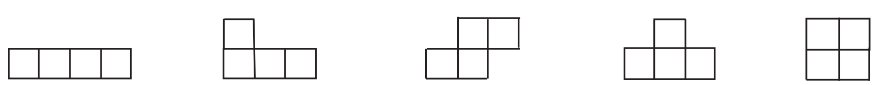


14. *Egy $ABCD$ egységnyi oldalú négyzetben adott öt pont. Igazoljuk, hogy nem lehet bármely két pont távolsága nagyobb, mint $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy bármelyik két pont közötti távolság nagyobb, mint $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Osszuk fel a négyzetet négy egybevágó kis négyzetre. Ekkor lesz olyan kisnégyzet, amelyikbe legalább két pont kerül, és ezek közötti távolság nem lehet nagyobb, mint a kisnégyzet átlójának hossza, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ezzel ellentmondásra jutottunk.



15. *A mellékelt ábrán öt alakzatot, úgynevezett tetraminót látunk. Mindegyik alakzat négy egybevágó egységnégyzetből áll. Össze lehet-e rakni ezekből (maradék nélküli felhasználásukkal) hézagmentesen és átfedés nélkül egy téglalapot?*



Megoldás. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy összerakható egy téglalap. Ha a megadott alakzatokat a sakktábla mintájára színezzük ki, akkor négy alakzaton két-két világos, illetve sötét mező lesz, egyen pedig három, illetve egy (vagy fordítva). Így a négy alakzaton együttesen nem egyenlő a világos és a sötét mezők száma, ellentmondás, tehát nem lehet belőlük téglalapot összeállítani.

16. *Igazoljuk, hogy $10^{2014} + 5$ nem négyzetszám.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, hogy $10^{2013} + 5 = k^2$, vagyis $1\underbrace{00\ldots00}_{2012}5 = k^2$, de $(1+5)\vdots 3$, így $k^2\vdots 3$, ezért $k\vdots 3$. Ekkor $100\ldots 005\vdots 9$, és ez azt jelentené, hogy $(1+5)\vdots 9$, ami abszurdum. Az előbbiekben a 9-cel való osztási szabállyal jutottunk ellentmondásba.

17. *Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$, akkor a $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ tört irreducibilis.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy a tört egyszerűsíthető egy $d \neq 1$ pozitív egész számmal. Ekkor $d \mid 21n+4$ és $d \mid 14n+3$. Ezek alapján $d \mid 42n+8$ és $d \mid 42n+9$, ahonnan azt kapjuk, hogy $d \mid 1$, vagyis $d=1$, ami ellentmondás.

18. *Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c páratlan egész számok, akkor az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nincs egész gyöke.*

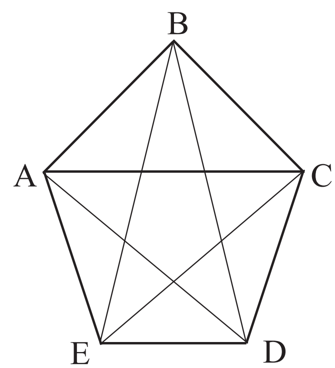
Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, hogy páratlan a, b, c értékek esetén az egyenletnek van $x=k$ egész szám megoldása. Ekkor $ak^2+bk+c=0 \Rightarrow k(ak+b)=-c$, ahonnan $k \mid c$ következne, ezért $k=2n+1$ kell legyen, de ezt visszahelyettesítve az egyenletbe $a(2n+1)^2+b(2n+1)+c=0$ ellentmondásra jutunk, hiszen páratlan számok összege nem lehet nulla.

19. *Igazoljuk, hogy végtelen sok prímszám van (Euklidész).*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, tehát csak véges számú prímszám van, legyenek ezek $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Képezzük az $N = p_1p_2\ldots p_n+1$ számot. Ez vagy összetett, vagy prím. Ha összetett lenne, akkor lennének prímosztói, de ezek csak a p_k közül lehetnek. Ez nem lehet, mert N nem osztható egyik p_k prímszámmal sem. Tehát N nem összetett, ezért prím, így mivel nagyobb bármelyik p_k prímszámnál, ezért egy újabb prímszámot kaptunk, ami ellentmond annak, hogy p_1, p_2, $\ldots$, p_n az összes prímszám.

20. *Az $ABCDE$ konvex ötszög minden oldalát és átlóját vagy kékre, vagy pirosra színezzük úgy, hogy nincsen azonos oldalszínű háromszög. Igazoljuk, hogy ekkor minden csúcsból pontosan két piros és pontosan két kék szakasz indul ki.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, így létezik olyan csúcs, amelyikből legalább három egyszínű szakasz indul ki. Legyenek ezek AB, AC és AD, és legyenek kékek. Ekkor az ABC háromszögben BC piros kell legyen, az ACD háromszögben DC is piros kell legyen, és az ABD háromszögben BD is piros kell legyen, de ez ellentmond az azonos színű háromszög létezésének.



21. *Igazoljuk, hogy az $x^2+y^2=3(z^2+t^2)$ egyenletnek nincs pozitív egész megoldása.*

Bizonyítás. Feltételezzük az ellenkezőjét, vagyis, az egyenletnek van (x_0, y_0, z_0, t_0) pozitív egész megoldása, ahol legyen x_0 a létező x értékek közül a legkisebb.

Tehát $x_0^2+y_0^2=3(z_0^2+t_0^2)$. De $3 \mid x_0^2+y_0^2$ alapján $3 \mid x_0^2$ és $3 \mid y_0^2$, ahonnan $3 \mid x_0$ és $3 \mid y_0$, tehát $x_0=3x_1$ és $y_0=3y_1$. Ezt visszaírva az egyenletbe kapjuk, hogy $9(x_1^2+y_1^2)=3(z_0^2+t_0^2)$, azaz $3(x_1^2+y_1^2)=z_0^2+t_0^2$. Mivel $3 \mid z_0^2$ és $3 \mid t_0^2$, ezért $3 \mid z_0$ és $3 \mid t_0$, visszaírva az egyenletbe kapjuk, hogy $3(x_1^2+y_1^2)=9(z_1^2+t_1^2) \Rightarrow x_1^2+y_1^2=3(z_1^2+t_1^2)$, ami azt jelenti, hogy (x_1, y_1, z_1, t_1) egy újabb megoldása az eredeti egyenletnek, ahol az $x_0=3x_1$ miatt x_1 egy kisebb megoldás, mint x_0, és ez ellentmondás.