FELVÉTELI VIZSGÁN KITŰZÖTT FELADATOK MŰSZAKI EGYETEM – KOLOZSVÁR, 2016. július

Számítsuk ki:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n}$ a) 1 b) e^{-2} c) e d) e^2 e) 0

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{3}-n}{\ln(n^2+1)}$ a) 0 b) $\ln 3$ c) $\ln\sqrt{3}$ d) $+\infty$ e) 1

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(3^{-k}+4^{-k})$ a) $\dfrac{17}{6}$ b) 1 c) $\dfrac{7}{12}$ d) 7 e) 0

Adott az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ függvény.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ egyenlő: a) 1 b) 0 c) -1 d) 2 e) $+\infty$

5. Az f grafikonjához húzott aszimptoták száma: a) 3 b) 2 c) 0 d) 1 e) 4

6. Az f helyi szélsőérték pontjainak száma: a) 4 b) 1 c) 0 d) 3 e) 2

7. Az f grafikonjához az $x=-1$ pontban húzott érintő egyenlete:

a) $y=x+1$ b) $y=x$ c) $y=-x$ d) $y=x+2$ e) $y=-x+1$

Adott az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-1)|x^2+a|$, $a\in\mathbb{R}$ függvény.

8. Ha $a=-1$, akkor $f'(1)$ egyenlő: a) nem létezik b) 0 c) 1 d) -1 e) 2

9. Az f függvény akkor és csak akkor deriválható $\mathbb{R}$-en, ha a eleme az alábbi halmaznak:

a) $\{-1,1\}$ b) $[0,\infty)$ c) $\{-1\}\cup[0,+\infty)$ d) $[-1,\infty)$ e) $[-1,1]$

Legyen az $x^5-5x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$ egyenlet.

10. Az egyenletnek akkor és csak akkor van egyetlen valós gyöke, ha m eleme az alábbi halmaznak:

a) $[-4,4]$ b) $\{-4\}$ c) $\{-4,4\}$ d) $(-4,4)$ e) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

11. Az egyenletnek akkor és csak akkor van legnagyobb számú különböző valós gyöke, ha m eleme az alábbi halmaznak:

a) $(4,\infty)$ b) $(-\infty,-4)$ c) $(-4,4)$ d) $[-4,4]$ e) $\{-4,4\}$

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)-\mathrm{tg}x}{x^3}$ egyenlő a) $\dfrac{1}{3}$ b) $-\dfrac{1}{3}$ c) $-\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{1}{6}$

13. $\int\limits_0^1(2x-1)\mathrm{d}x$ egyenlő: a) 1 b) 0 c) $\dfrac{1}{2}$ d) -1 e) 3

14. $\int\limits_0^1 x\ln(x+1)\mathrm{d}x$ egyenlő: a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\ln 2$ e) 0

15. $\int\limits_{-1}^{1}(|x|+x^{2017})e^{|x|}\mathrm{d}x$ egyenlő: a) $e+1$ b) 2017 c) e d) 2 e) $e-1$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{3}\frac{x^{n+1}}{x^n+1}\mathrm{d}x$ egyenlő: a) 1 b) 0 c) 3 d) $+\infty$ e) 4

17. $\int\limits_{a}^{b}\frac{\ln x}{x^2+ab}\mathrm{d}x$, $0<a<b$ egyenlő:

a) $b-a$ b) $\frac{\ln(ab)}{\sqrt{ab}}$ c) $\frac{\ln(ab)}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{ab}$ d) $\frac{\ln(ab)}{2\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

18. Az $f,g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ függvények grafikonja által meghatározott síkrész területe: a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$

19. Legyenek $A(1,1)$, $B(2,-3)$, $C(6,0)$. A D pont koordinátái, amelyre $ABCD$ paralelogramma, egyenlő: a) $(4,5)$ b) $(4,4)$ c) $(3,5)$ d) $(1,6)$ e) $(5,4)$

20. Az α paraméter mely értékeire lesznek a $3\alpha x-8y+13=0$ és $(\alpha+1)x-2\alpha y-5=0$ egyenesek párhuzamosak:

a) $\alpha_1=2;\alpha_2=-\frac{2}{3}$ b) $\alpha_1=-2;\alpha_2=\frac{1}{3}$ c) $\alpha_1=2;\alpha_2=\frac{2}{3}$

d) $\alpha_1=-2;\alpha_2=-\frac{1}{3}$ e) $\alpha_1=\frac{1}{2};\alpha_2=3$

21. Az $A(2,2)$ pont szimmetrikusa a $2x-y=0$ egyenletű egyenesre nézve egyenlő:

a) $\left(\frac{14}{5},\frac{2}{5}\right)$ b) $\left(\frac{1}{5},\frac{13}{5}\right)$ c) $\left(\frac{1}{3},\frac{13}{4}\right)$ d) $\left(-\frac{1}{3},\frac{7}{6}\right)$ e) $\left(\frac{2}{5},\frac{14}{5}\right)$

22. Az ABC háromszög területe, ha $AB=4$, $AC=3$ és $m(\widehat{A})=\frac{\pi}{6}$ egyenlő:

a) 4 b) 3 c) 6 d) 12 e) 1

Legyenek x_1,x_2,x_3 az $x^3+2x+2=0$ egyenlet gyökei és legyen $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{pmatrix}$.

23. Az adott egyenlet racionális gyökeinek száma egyenlő:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) más válasz

24. $x_1+x_2+x_3$ egyenlő: a) 1 b) 0 c) -1 d) 2 e) -2

25. Az adott egyenlet valós megoldásainak száma egyenlő:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4

26. Az A^2 mátrix determinánsa egyenlő: a) -100 b) -140 c) -16 d) 100 e) 0

Adott a $z=1+i$ komplex szám.

27. z^2 egyenlő: a) $2+2i$ b) -2 c) 0 d) $4i$ e) $2i$

28. A legkisebb természetes szám, amelyre $z^n\in\mathbb{R}$ és $z^n\geq 100$ egyenlő:

a) 16 b) 12 c) 20 d) 8 e) 24

Adott az $(U, \cdot)$ multiplikatív csoport, ahol $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ha $a, b \in \mathbb{C}^*$ és $n \in \mathbb{N}^*$, értelmezzük az $A_n(a, b) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid az^n = b\}$ halmazokat.

29. Az $A_2(1, -1)$ halmaz egyenlő: a) $\{1, 2\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1\}$ e) $\{-i, i\}$

30. Az (a, b) pontok halmaza, amelyre $A_n(a, b)$ részcsoportja az $(U, \cdot)$ csoportnak, egyenlő:
a) $\{1, 1\}$ b) $\{(a, -a) \mid a \in \mathbb{C}^*\}$ c) $\{(a, 1) \mid a \in \mathbb{C}\}$
d) $\{(a, a) \mid a \in \mathbb{C}^*\}$ e) $\{(a, b) \mid |a| = |b|\}$

31. Az n értékek száma, amelyekre $A_n(1, -1)$ részcsoportja az $(U, \cdot)$ csoportnak, egyenlő:
a) végtelen b) 1 c) 2 d) 4 e) 0

32. Az $a \in \mathbb{Z}$ értékek száma, amelyekre az $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax$ függvény automorfizmusa a $(\mathbb{Z}, +)$ csoportnak, egyenlő: a) 3 b) 1 c) 0 d) 2 e) végtelen

33. A 4, 5 és 7 egységnyi oldalhosszúságú háromszög
a)hegyesszögű b) derékszögű c) tompaszögű d) egyenlő szárú e) más válasz

34. Az a tag, amelyben nem szerepel x az $\left(x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ binomiális felbontásában:

a) C_{20}^{13} b) C_{20}^{14} c) C_{20}^{16} d) C_{20}^{15} e) C_{20}^{17}

Adott a $\begin{cases} -x + my - z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= -3 \\ mx + y + z &= n \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol $m, n \in \mathbb{R}$.

35. A rendszer detrminánsa egyenlő: a) $m^2 + 2m$ b) $m^2 - 2m + 1$ c) $2m^2 + 3m - 1$
d) $m^2 - 2m + 2$ e) $2m^2 - 3m + 1$

36. A rendszer akkor és csak akkor összeférhető határozott, ha

a) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$ c) $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$
d) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

37. $m = 1$ esetén a rendszer akkor és csak akkor összeférhető határozatlan, ha
a) $n = -1$ b) $n = 1$ c) $n = 0$ d) $n \neq 1$ e) $n \neq 3$

Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $i^2 = -1$.

38. $\det A$ egyenlő: a) $2i$ b) -1 c) i d) 1 e) $2 + i$

39. $A^2 - 2A + I_2$ egyenlő: a) I_2 b) O_2 c) $-I_2$ d) A e) iI_2

40. A^{-1} egyenlő: a) $2I_2 - A$ b) $2I_2 + A$ c) $A - 2I_2$ d) A e) $A + I_2$

41. A^{10} egyenlő: a) $\begin{pmatrix} 11 & 10i \\ 10i & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 11 & 9i \\ 9i & -9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 11 & 10i \\ 10i & -9 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 11 & -10i \\ -10i & -9 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10i & -9 \end{pmatrix}$

Adott az $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - \sin^2 x$ függvény.

42. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ egyenlő: a) -1 b) 1 c) 0 d) 3 e) 2

43. Az f függvény minimuma egyenlő: a) -1 b) $-\dfrac{3}{4}$ c) $-\dfrac{5}{4}$ d) 0 e) 1

44. Az a valós paraméter azon értékeinek halmaza, amelyre az $f(x)=a$ egyenletnek van megoldása, egyenlő:

a) $\left[-\dfrac{5}{4},1\right]$ b) $\left[-\dfrac{5}{4},\sqrt{2}\right]$ c) $\left[-\dfrac{5}{4},0\right]$ $[-1,1]$ e) $[-2,1]$

45. Az ABC háromszögben adottak $AB=3$, $AC=4$ és $m(\widehat{A})=60°$. A BC szakasz hossza egyenlő: a) 5 b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{13}$ d) $\sqrt{10}$ e) 3

Megoldási kulcs: **1.** d); **2.** c); **3.** a); **4.** b); **5.** d); **6.** e); **7.** a); **8.** b); **9.** c); **10.** e); **11.** c); **12.** a) **13.** b); **14.** c); **15.** d); **16.** e) **17.** d); **18.** b); **19.** e); **20.** a); **21.** e); **22.** b); **23.** a) **24.** b); **25.** d); **26.** b); **27.** e) **28.** a); **29.** e); **30.** d); **31.** e); **32.** d); **33.** c); **34.** d) **35.** e); **36.** b); **37.** c); **38.** d) **39.** b); **40.** a); **41.** c); **42.** a); **43.** c); **44.** a) **45.** c).

Megoldások

Összeállította: **Szilágyi Jutka** tanár, Kolozsvár

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^2=e^2.$

2. A határérték kiszámítására a Cesàro-Stolz-tételt alkalmazzuk.

Tekintsük az $a_n=3+\sqrt{3}+\sqrt[2]{3}+\ldots+\sqrt[n]{3}-n$ és a $b_n=\ln(n^2+1)$ pozitív tagú sorozatokat. A $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan növekvő és felülről nem korlátos. Ugyanakkor

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n+1]{3}-1}{\ln\left[\dfrac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\right]}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n+1]{3}-1}{\dfrac{1}{n+1}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln\left(\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)^{n+1}}=$$

$$=\ln 3\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln\left[\left(1+\dfrac{2n+1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n+1}}\right]^{\frac{(2n+1)(n+1)}{n^2+1}}}=\frac{\ln 3}{\ln e^2}=\frac{\ln 3}{2}=\ln\sqrt{3}.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(3^{-k}+4^{-k})=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)+\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{3}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{1}{\dfrac{2}{3}}+\frac{1}{\dfrac{3}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}=\frac{17}{6}.$$

4. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=0\cdot 1=0.$$

5. Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, következik, hogy az $y=0$ egyenletű egyenes (Ox tengely) vízszintes aszimptotája a függvénynek $-\infty$-ben.

Mivel $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, ezért az Ox tengely vízszintes aszimptotája a függvénynek $+\infty$-ben.

A függvénynek így nincs ferde aszimptotája. Ugyanakkor f az $\mathbb{R}$-en értelmezett elemi függvény, így függőleges aszimptota sincs. Tehát f-nek egyetlen aszimptotája van, az Ox tengely.

6. Az f függvény folytonos és deriválható a valós számok halmazán (elemi függvény).
$f'(x) = \dfrac{x^2+x+1-2x(x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.
$f'(x) = 0 \iff x^2+x-1=0 \iff x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ vagy $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
A függvény változási táblázata:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	

A táblázat alapján a függvénynek egy helyi minimumpontja $\left(x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ és egy helyi maximumpontja $\left(x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ van. Tehát összesen két helyi szélsőértékponttal rendelkezik a függvény.

7. Az érintési pont koordinátái $A(-1, f(-1))$, az érintő iránytényezője: $m = f'(1)$.
$f(-1) = 0$, $f'(-1) = 1$, ahonnan az érintő egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0) \iff$ $\iff y = 1(x+1) \iff y = x+1$.

8. $a = -1$ esetén $f(x) = (x^2-1)|x^2-1| = \begin{cases} (x^2-1)^2, & \text{ha } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -(x^2-1)^2, & \text{ha } x \in (-1, 1) \end{cases}$

f deriválható a $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ és $(1, +\infty)$ intervallumokon.

$f'(x) = \begin{cases} 4x(x^2-1), & \text{ha } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -4x(x^2-1), & \text{ha } x \in (-1, 1) \end{cases}$

$f'_b(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = -4 \cdot 0 = 0$, $f'_j(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = 4 \cdot 0 = 0$, f folytonos, így létezik az $f'(1) = 0$.

9. Ha $a \geq 0$, akkor $f(x) = (x^2-1)(x^2+a)$, bármely $x \in \mathbb{R}$, ami deriválható $\mathbb{R}$-en.

Ha $a < 0$, akkor $f(x) = \begin{cases} (x^2-1)(x^2+a), & \text{ha } x \in (-\infty, -\sqrt{-a}] \cup [\sqrt{-a}, +\infty) \\ -(x^2-1)(x^2+a), & \text{ha } x \in (-\sqrt{-a}, \sqrt{-a}) \end{cases}$

f folytonos $\mathbb{R}$-en és $f'(x) = \begin{cases} 4x^3+2(a-1)x, & \text{ha } x \in (-\infty, -\sqrt{-a}) \cup (\sqrt{-a}, +\infty) \\ -4x^3-2(a-1)x, & \text{ha } x \in (-\sqrt{-a}, \sqrt{-a}) \end{cases}$

$f'_b(-\sqrt{-a}) = \lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{-a} \\ x < -\sqrt{-a}}} f'(x) = 4(-a)\sqrt{-a} - 2(a-1)\sqrt{-a} = 2a\sqrt{-a} + 2\sqrt{-a}$

$f'_j(-\sqrt{-a}) = \lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{-a} \\ x > -\sqrt{-a}}} f'(x) = -2|a|\sqrt{-a} - 2\sqrt{-a}$

f deriválható az $x = -\sqrt{-a}$ pontban, ha $2a\sqrt{-a} + 2\sqrt{-a} = -2a\sqrt{-a} - 2\sqrt{-a} \iff$ $\iff 4\sqrt{-a}(a+1) = 0$ és $a < 0 \iff a+1 = 0 \iff a = -1$.
Ugyanakkor $f'_b(\sqrt{-a}) = 4(-a)\sqrt{-a} + 2(a-1)\sqrt{-a} = -2a\sqrt{-a} - 2\sqrt{-a}$ és
$f'_j(\sqrt{-a}) = 2a\sqrt{-a} + 2\sqrt{-a}$

Így f deriválható az $x = \sqrt{-a}$ pontban, ha $-2a\sqrt{-a} - 2\sqrt{-a} = 2a\sqrt{-a} + 2\sqrt{a} \iff$ $\iff 4\sqrt{-a}(a+1) = 0$ és $a < 0 \iff a + 1 = 0 \iff a = -1$.

Tehát negatív a esetén az f függvény csak akkor deriválható $\mathbb{R}$-en, ha $a = -1$.

Így $a \in [0, +\infty) \cup \{-1\}$ értékekre a függvény deriválható $\mathbb{R}$-en.

10. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x + m$ függvényt. Zérushelyeinek számát a Rolle-sor segítségével tanulmányozzuk.

$f'(x) = 5x^4 - 5$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor $f'(x) = 0 \iff x^4 = 1 \iff x \in \{-1, 1\}$.

A Rolle-sor:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\operatorname{sgn}(m+4)$	$\operatorname{sgn}(m-4)$	$+\infty$

Ahhoz, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása legyen a Rolle-sorban egyetlen előjelváltás állhat fenn és ez a következő esetekben történik meg:

a) $m - 4 < m + 4 < 0 \iff m < -4$

b) $0 < m - 4 < m + 4 \iff m > 4$

Tehát $m \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ értékekre az $x^2 - 5x + m = 0$ egyenletnek egyetlen valós megoldása van.

11. Az egyenletnek legtöbb három valós gyöke van és ez akkor történik meg, ha $m+4 > 0$ és $m - 4 < 0$, vagyis $m \in (-4, 4)$.

12. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x) - \operatorname{tg}x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{tg}x)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1 - \cos^2(\operatorname{tg}x)}{\cos^2(\operatorname{tg}x)}}{3x^2} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg}x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

13. $$\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x = (x^2 - x)\Big|_0^1 = 1 - 1 - (0 - 0) = 0.$$

14. $$\int_0^1 x\ln(x+1)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}.$$

15. $$\int_{-1}^1 (|x| + x^{2017}) \cdot e^{|x|}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(x^{2017} - x\right) \cdot e^{-x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(x^{2017} + x\right) \cdot e^{x}\mathrm{d}x.$$

Az első integrálban $x = -t$ helyettesítést végzünk. Így $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(x^{2017} - x\right) \cdot e^{-x}\mathrm{d}x =$

$$= \int_1^0 \left(-t^{2017}+t\right)\cdot e^t(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 \left(t-t^{2017}\right)\cdot e^t\mathrm{d}t, \text{ ahonnan } I = \int_0^1 \left(x-x^{2017}\right)\cdot e^x\mathrm{d}x +$$

$$+\int_0^1 \left(x+x^{2017}\right)\cdot e^x\mathrm{d}x = \int_0^1 2xe^x\mathrm{d}x = 2\left(x\cdot e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x\right) = 2\left(e - e^x\Big|_0^1\right) = 2(e-e+1) = 2.$$

16. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^{n+1}+x}{x^n+1}\mathrm{d}x = \int_0^3 x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9}{2}$, és innen $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^{n+1}}{x^n+1}\mathrm{d}x = \frac{9}{2} - \int_0^3 \frac{x}{x^n+1}\mathrm{d}x$.

Tekintsük a $\displaystyle J_n = \int_0^1 \frac{x}{x^n+1}\mathrm{d}x$ sorozatot, $n\in\mathbb{N}^*$.

$$J_n = \int_0^1 \frac{x}{x^n+1}\mathrm{d}x + \int_0^{1+\frac{1}{m}} \frac{x}{x^n+1}\mathrm{d}x + \int_{1+\frac{1}{m}}^3 \frac{x}{x^n+1}\mathrm{d}x = A_n + B_{m,n} + C_{m,n}.$$

Bármely $x > 1+\dfrac{1}{m}$ esetén $x^n > \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^n > 1+\dfrac{n}{m} \Rightarrow 0 < C_{m,n} < 3\displaystyle\int_{1+\frac{1}{m}}^1 \frac{1}{2+\frac{n}{m}}\mathrm{d}x =$

$= \dfrac{3\left(2-\frac{1}{m}\right)}{2+\frac{n}{m}}$, és bármely rögzített $m\in\mathbb{N}^*$ esetén $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(2-\frac{1}{m}\right)}{2+\frac{n}{m}} = 0$, így a fogó-tétel alapján $\displaystyle\lim_{n\to\infty} C_{m,n} = 0$. Ugyanakkor a középértéktétel alapján létezik $c\in\left(1, 1+\dfrac{1}{m}\right)$, amelyre $B_{m,n} = \dfrac{c}{c^n+1}\left(1+\dfrac{1}{m}-1\right) = \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{c}{c^n+1} < \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{c}{2} < \dfrac{1}{2m}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)$ bármely $n\in\mathbb{N}^*$, így $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_{m,n} \le \frac{1}{2m}\left(1+\frac{1}{m}\right)$ (1).

Ha L-el jelöljük a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ határértéket, a $J_n = A_n + B_{m,n} + C_{m,n}$ összefüggésben n szerint határértékre térve és az (1) egyenlőtlenséget használva a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n \le L + \frac{1}{2m}\left(1+\frac{1}{m}\right)$, bármely $m\in\mathbb{N}^*$, egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n \le L$ (2).

Másrészt, mivel $C_{m,n}\ge 0$ és $B_{m,n}\ge 0$, bármely $m,n\in\mathbb{N}^*$ esetén, így $J_n\ge A_n$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén, ahonnan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n \ge \lim_{n\to\infty} A_n = L$ (3).

A (2) és (3) egyenlőtlenségek alapján $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = L$, így $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^3 \frac{x^{n+1}}{x^n+1}\mathrm{d}x = \frac{9}{2} - L$.

Igazoljuk, hogy létezik az L határérték.

Ha $x\in[0,1]$, akkor $x^{n+1} < x^n \Rightarrow 1+x^{n+1} < 1+x^n \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^n} < \dfrac{x}{1+x^{n+1}}$, így $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x}{1+x^{n+1}}\mathrm{d}x$, vagyis $A_n \le A_{n+1}$. Másrészt $\displaystyle A_n = \int_0^1 \frac{x}{x^n+1}\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x}{1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, bármely $n\ge 1$ esetén.

Tehát az $(A_n)_{n\ge N^*}$ sorozat növekvő és felülről korlátos, így konvergens, ezért létezik $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = L$.

Ugyanakkor $A_{2n} = \int\limits_0^1 \frac{x}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2x}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{u^n+1}\mathrm{d}u$, ahol az $x^2 = u$ helyettesítést végeztük.

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{1}{u^n+1}\mathrm{d}u = 1$.

$1 - \frac{1}{u^n+1} = \frac{u^n}{u^n+1} < u^n$, bármely $u \in (0,1)$ esetén, és így $\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^n+1}\right)\mathrm{d}u \leq$ $\leq \int\limits_0^1 u^n\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}$, tehát $1 - \int\limits_0^1 \frac{1}{u^n+1}\mathrm{d}u < \frac{1}{n+1}$, ahonnan $1 - \frac{1}{n+1} < \int\limits_0^1 \frac{1}{u^n+1}\mathrm{d}u$ (5).

Ugyanakkor $u^n > 0 \Rightarrow u^n + 1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{u^n+1} < 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{1}{u^n+1}\mathrm{d}u < \int\limits_0^1 1\mathrm{d}u = 1$ (6).

Az (5) és (6) egyenlőtlenségekből, a fogó-tétel alapján következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{1}{u^n+1}\mathrm{d}u = 1$.

Mivel $A_{2n} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{u^n+1}\mathrm{d}u$, következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} A_{2n} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$, és mivel $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergens sorozat, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n} = \frac{1}{2}$, így $L = \frac{1}{2}$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^3 \frac{x^{n+1}}{x^n+1}\mathrm{d}x = \frac{9}{2} - L =$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$.

17. Az integrál kiszámítására az $x = \sqrt{ab}\cdot t$ helyettesítést végezzük. Így

$$\int\limits_a^b \frac{\ln x}{x^2+ab}\mathrm{d}x = \sqrt{ab}\cdot\int\limits_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{\ln\sqrt{ab}+\ln t}{ab(t^2+1)}\mathrm{d}t = \int\limits_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{\ln\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(t^2+1)}\mathrm{d}t + \int\limits_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{\ln t}{ab(t^2+1)}\mathrm{d}t = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int\limits_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\cdot\frac{\ln\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\cdot\frac{\ln ab}{2\sqrt{ab}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}\cdot\frac{\ln ab}{2\sqrt{ab}} = \frac{\ln ab}{2\sqrt{ab}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{b-a}{2\sqrt{ab}} \quad \text{és}$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int\limits_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot I, \text{ ahol } I = \int\limits_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t.$$

A $t = \dfrac{1}{u}$ helyettesítést alkalmazva, $I = \displaystyle\int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{-\ln u}{\frac{1}{u^2}+1} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) \mathrm{d}u = -\int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{\ln u}{u^2+1} \mathrm{d}u = -I$, tehát $I = -I$, ahonnan $I = 0$, így $I_2 = \dfrac{1}{\sqrt{ab}} \cdot 0 = 0$.

Tehát $I = I_1 + I_2 = \dfrac{\ln(ab)}{2\sqrt{ab}} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

18. $T = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 |x - x^2| \mathrm{d}x$.

Bármely $x \in [0,1]$ esetén $x \geq x^2$, így $|x - x^2| = x - x^2$, ahonnan $T = \displaystyle\int_0^1 (x - x^2) \mathrm{d}x =$ $= \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

19. Az $ABCD$ négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha átlói felezik egymást, $\dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ és $\dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2} \iff 1 + 6 = 2 + x_D$ és $1 + 0 = -3 + y_D \iff$ $\iff x_D = 5$ és $y_D = 4$.

Tehát a D pont koordinátái: $(5, 4)$.

20. A két egyenes párhuzamosságának feltétele: $\dfrac{3\alpha}{\alpha+1} = \dfrac{-8}{-2\alpha} \neq \dfrac{13}{-5} \iff 3\alpha^2 = 4\alpha + 4$, ahonnan $\alpha = 2$ vagy $\alpha = -\dfrac{2}{3}$.

21. Jelöljük A'-tel az $A(2,2)$ pontnak a $d\colon y = 2x$ egyenletű egyenes szerinti szimmetrikusát. Mivel $AA' \perp d$, írhatjuk, hogy $m_d \cdot m_{AA'} = -1$, ahonnan $m_{AA'} = -\dfrac{1}{2}$. Így az AA' egyenes egyenlete: $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x-2) \iff y = -\dfrac{x+6}{2}$.

Legyen $\{B\} = d \cap d'$. A B pont koordinátái az $\begin{cases} y = 2x \\ y = \dfrac{-x+6}{2} \end{cases}$ egyenletrendszer megoldásai: $B\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$. Mivel B az $[AA']$ felezőpontja, ezért $x_B = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2}$ és $y_B = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2}$, ahonnan $x_{A'} = 2x_B - x_A$ és $y_{A'} = 2y_B - y_A$, vagyis $x_{A'} = \dfrac{2}{5}$ és $y_{A'} = \dfrac{14}{5}$.

22. $T_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{A})}{2} = 2 \cdot 3 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = 6 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$.

23. Ha a $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ szám az $f = x^3 + 2x + 2$ egész együtthatós polinom gyöke, akkor $p \mid 2$ és $q \mid 1 \Rightarrow \dfrac{p}{q} \in \{-2, -1, 1, 2\}$. De $f(-2) = -10 \neq 0$, $f(-1) = -1 \neq 0$, $f(1) = 5 \neq 0$ és $f(2) = 14 \neq 0$, így f-nek nincs egyetlen racionális gyöke sem.

24. A Viète-összefüggések felhasználásával: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

25. Mivel $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, az f függvény szigorúan növekvő $\mathbb{R}$-en, így az $f(x) = 0$ egyenletnek legtöbb egy megoldása van $\mathbb{R}$-en (1).

Ugyanakkor $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ és $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, így az f folytonos függvénynek van legalább egy megoldása $\mathbb{R}$-en (2).

(1) és (2) alapján az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy megoldása van $\mathbb{R}$-en.

26. $\det A^2 = \det A \cdot \det A$ és mivel $\det A = \det A^t \Rightarrow \det A^2 = \det A \cdot \det A^t = \det(A \cdot A^t)$.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}, \text{ ahol } S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k,\ 1 \le k \le 4.$$

$S_2 = S_1^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4)$, valamint a Viète-összefüggések alapján $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ és $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 2$, innen $S_2 = -4$.

Ugyanakkor, mivel $x_1^3 + 2x_1 + 2 = 0$, $x_2^3 + 2x_2 + 2 = 0$ és $x_3^3 + 2x_3 + 2 = 0$, az összefüggéseket összegezve azt kapjuk, hogy $S_3 + 2S_1 + 6 = 0$, ahonnan $S_3 = -6$. A fenti összefüggéseket rendre beszorozzuk x_1, x_2, illetve x_3-mal, majd összeadjuk őket, így az $S_4 + 2S_2 + 2S_1 = 0$ összefüggéshez jutunk, ahonnan $S_4 = -2S_2 = 8$.

Tehát $\det A^2 = \det(A \cdot A^t) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -6 \\ -4 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -96 + 64 - 108 = -140$.

27. $z^2 = (1 + i)^2 = 2i$.

28. $z^3 = 2i(1 + i) = -2 + 2i \notin \mathbb{R}$, $z^4 = (2i)^2 = -4 \in \mathbb{R}$.

Általában $z^{4k} = (-4)^k \in \mathbb{R}$. Ekkor $(-4)^k \ge 100 \iff k = 2p$ és $k \ge 4$. Tehát a legkisebb ilyen szám $k = 4$, ahonnan $4k = 16$. Tehát $n = 16$.

29. $A_2(1, -1) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^2 = -1\}$.

$z^2 = -1 \iff z^2 - (-1) = 0 \iff z^2 - i^2 = 0 \iff (z - i)(z + i) = 0 \iff z = i$ vagy $z = -i$, ahonnan $A_2(-1, 1) = \{-i, i\}$.

30. $A_n(a, b) \subset U$, így bármely $z \in A_n(a, b)$ esetén $|z| = 1$ (1).

Ha $z \in A_n(a, b)$ és $a \ne 0$, akkor $z^n = \dfrac{b}{a} \Rightarrow |z|^n = \left|\dfrac{b}{a}\right| \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{\left|\dfrac{b}{a}\right|}$ (2).

Az (1) és (2) alapján $\sqrt[n]{\left|\dfrac{b}{a}\right|} = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{b}{a}\right| = 1 \Rightarrow b = a$ vagy $b = -a$.

Ha $b = a$, akkor $A_n(a, a) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\} = U_n$ és $(U_n, \cdot) \le (U, \cdot)$.

Ha $b = -a$, akkor $A(a, -a)$ nem részcsoport (lásd a 31. feladatot).

Tehát $(a, b) \subset \{(a, a) \mid a \in \mathbb{C}^*\}$.

31. $A_n(1, -1) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = -1\}$. Ahhoz, hogy $A_n(1, -1)$ részcsoportja legyen az $(U, \cdot)$ csoportnak, zártnak kell lennie, vagyis teljesülnie kell a következő feltételnek: bármely $z_1, z_2 \in A_n(1, -1)$ esetén $z_1z_2 \in A_n(1, -1)$.

Mivel $z_1, z_2 \in A_n \Rightarrow z_1^n = -1$, $z_2^n = -1 \Rightarrow (z_1z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = (-1)(-1) = 1 \ne -1$, így $z_1z_2 \notin A_n(1, -1)$ egyetlen n esetén sem, vagyis az $A_n(1, -1)$ nem részcsoportja az $(U, \cdot)$ csoportnak egyetlen n értékre sem.

32. $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ bármely $a \in \mathbb{Z}$ és bármely $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén, tehát f morfizmus bármely $a \in \mathbb{Z}$ esetén.

Ha $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow a(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow a = 0$ vagy $x_1 = x_2$.

Tehát $a \neq 0$ esetén az f függvény injektív.

Ahhoz, hogy f automorfizmus legyen szürjektívnek is kell lennie, vagyis $\mathrm{Im} f = \mathbb{Z} \iff a\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, ami csak $a = 1$ vagy $a = -1$ esetén igaz. Tehát két olyan a érték van, amelyre f automorfizmus.

33. A háromszög legnagyobb szöge a leghosszabb oldallal, vagyis a 7 egységnyi hosszúságú oldallal szemben fekvő szög. Jelöljük ezt A-val.

A koszinusztétel értelmében: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, vagyis $\cos A = \dfrac{16 + 25 - 49}{40} = -\dfrac{1}{5} < 0$, ami azt jelenti, hogy a háromszög tompaszögű.

34. A kifejtés $(k+1)$. tagja: $T_{k+1} = C_{20}^{k} \cdot x^{20-k} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k} = C_{20}^{k} \cdot x^{20-k-\frac{k}{3}} = C_{20}^{k} \cdot x^{20-\frac{4k}{3}}$ akkor nem tartalmazza x-et, ha $20 - \dfrac{4k}{3} = 0 \iff \dfrac{4k}{3} = 20 \iff k = 15$. Így $T_{16} = C_{20}^{15}$.

35. A rendszer mátrixa $A = \begin{pmatrix} -1 & m & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & m & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 2m^2 - m + 2 - 2m = 2m^2 - 3m + 1.$$

36. A rendszer akkor és csak akkor összeférhető határozott, ha $\det A \neq 0 \iff 2m^2 - 3m + 1 \neq 0$. A $2m^2 - 3m + 1 = 0$ egyenlet megoldásai: $m_1 = 1$, $m_2 = \dfrac{1}{2}$. Így $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

37. $m = 1$ esetén az egyenletrendszer: $\begin{cases} -x + y - z & = 2 \\ 2x - y + 2z & = -3 \\ x + y + z & = n \end{cases}$.

Ődeterminánsnak választhatjuk a $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ determinánst. Ahhoz, hogy a rendszer összeférhető, határozatlan legyen a karakterisztikus determináns értéke nulla kell legyen (ahhoz, hogy $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\, \overline{A}$ teljesüljön).

$$d_{kar} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & n \end{vmatrix} = n + 4 - 3 + 2 - 3 - 2n = -n. \text{ Tehát } -n = 0 \iff n = 0$$

38. $\det A = 0 - i^2 = 1$.

39. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}$ és $A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ 2i & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

40. Az előző feladat alapján $A^2 - 2A + I_2 = O_2 \iff 2A - A^2 = I_2 \iff A(2I_2 - A) = (2I_2 - A) \cdot A = I_2 \iff A$ inverz mátrixa a $2I_2 - A$ mátrix.

41. A 39-es feladat alapján $A^2 = 2A - I_2$, ahonnan $A^3 = A^2 \cdot A = 2A^2 - A = 2(2A - I_2) - A = 3A - 2I_2$ és $A^4 = A^3 \cdot A = 3A^2 - 2A = 3(2A - I_2) - 2A = 4A - 3I_2$.

Indukcióval igazolható, hogy $A^n = nA - (n-1)I_2$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, így

$$A^{10} = 10A - 9I_2 = \begin{pmatrix} 20 & 10i \\ 10i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10i \\ 10i & -9 \end{pmatrix}.$$

42. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} - \sin^2\dfrac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$.

43. $f(x) = \cos x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x + \cos x - 1 = \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

Ha $x \in [0, 2\pi) \Rightarrow \cos x \in [-1, 1] \Rightarrow \cos x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \Rightarrow \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 \in \left[0, \frac{9}{4}\right]$. Ekkor $\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \in \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$, és a határokat el is éri a kifejezés, így $f_{\min} = -\frac{5}{4}$.

44. Az előző feladat megoldása alapján $\mathrm{Im} f = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$, így az $f(x) = a$ egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $a \in \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

45. A koszinusztétel alapján: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$, ahonnan $BC^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13$, így $BC = \sqrt{13}$.