## FELVÉTELI VIZSGÁN KITŰZÖTT FELADATOK
## MŰSZAKI EGYETEM – KOLOZSVÁR, 2018. július

**1.** $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \sin x$ egyenlő: a) nem létezik b) 0 c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) 1

Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix és $A^n = \begin{pmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Jelöljük $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** $2A - A^2$ egyenlő: a) $A + I_2$ b) $I_2$ c) $2I_2$ d) $O_2$ e) $A - I_2$

**3.** $A^{48}$ egyenlő: a) $O_2$ b) $2^{12}I_2$ c) $2^{48}I_2$ d) $2^{48}A$ e) $2^{24}I_2$

**4.** $\dfrac{x_{10}^2 + y_{10}^2}{x_8^2 + y_8^2}$ egyenlő: a) 16 b) 2 c) 8 d) 4 e) 1

A $(-1, 1)$ intervallumon értelmezzük a „$*$” műveletet:
$$x * y = \frac{2xy + 3(x+y) + 2}{3xy + 2(x+y) + 3},\ x, y \in (-1, 1).$$

**5.** A „$*$” művelet semleges eleme egyenlő: a) 0 b) $\dfrac{2}{3}$ c) $-\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $-\dfrac{1}{3}$

**6.** Ha az $f\colon (-1,1) \to (0,+\infty)$, $f(x) = a \cdot \dfrac{1-x}{1+x}$ függvényre teljesül az $f(x*y) = f(x)f(y)$ egyenlőség bármely $x, y \in (-1,1)$ esetén, akkor $x$ egyenlő:

a) $-\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $-\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $-\dfrac{1}{5}$

**7.** Az $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{10-szer}} = \dfrac{1}{10}$ egyenlet megoldásainak száma egyenlő:

a) 2 b) 0 c) 1 d) 10 e) 5

**8.** Ha $x \in (\pi, 2\pi)$ és $\cos x = \dfrac{3}{5}$, akkor $\sin x$ egyenlő:

a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{4}{5}$ c) $-\dfrac{4}{5}$ d) 1 e) $-\dfrac{3}{4}$

**9.** Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 0}$ pozitív tagú sorozatot: $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_{n+1}^3 = a_n^2 a_{n-1}$, $n \geq 1$. Ha $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 8$, akkor az $a$ értéke egyenlő:

a) 2 b) 16 c) 8 d) 32 e) 4

**10.** Ha $\lg 5 = a$ és $\lg 6 = b$, akkor $\log_3 2$ egyenlő:

a) $\dfrac{1+a}{a+b+1}$ b) $\dfrac{1+a}{a-b+1}$ c) $\dfrac{1-a}{a+b+1}$ d) $\dfrac{1-a}{a+b-1}$ e) $\dfrac{1-a}{b-1}$

**11.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot 9^x + 5^x + 4}{9^{x+1} - 5^x + 2^x}$ egyenlő: a) $\dfrac{2}{9}$ b) 2 c) 1 d) $\dfrac{1}{9}$ e) $+\infty$

**12.** Ha $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\alpha^3 = 1$, akkor $(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^3)(1+\alpha^4)(1+\alpha^5)(1+\alpha^6)$ egyenlő:

a) 64 b) 0 c) 16 d) 4 e) $8i$

Számítsátok ki:

**13.** $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ a) $\ln 2$ b) $\ln 3$ c) $\ln 4$ d) $\ln 5$ e) $\ln 8$

**14.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}$

a) $\operatorname{arctg}\dfrac{e}{e+1}$ b) $\operatorname{arctg} e - \dfrac{\pi}{4}$ c) $\operatorname{arctg}\dfrac{e}{e^2+1}$ d) $\ln\dfrac{e}{e+1}$ e) $\ln(2e)$

**15.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\mathrm{d}x$ a) $\ln 2$ b) $\pi \ln 4$ c) $\pi \ln 8$ d) $\ln\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ e) $\ln(\pi e)$

**16.** Jelölje $\{x\}$ az $x$ szám tört részét. Akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} n \displaystyle\int_0^{\pi} \{x\}^n \mathrm{d}x$ egyenlő:

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) 4 c) 2 d) $\pi$ e) 3

**17.** Adottak az $A(2,3)$ és $B(4,5)$ pontok. Az $[AB]$ oldalfelezőjének egyenlete:

a) $2x - y = 2$ b) $2x + y = 10$ c) $x + 2y = 11$ d) $-x + y = 1$ e) $x + y = 7$

**18.** Ha $x, y \in \mathbb{R}$ értékekre fennáll a $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$ egyenlet, akkor az $\dfrac{x}{y}$ kifejezés értékeinek halmaza egyenlő:

a) $\{4\}$ b) $\{1\}$ c) $\{1,4\}$ d) $\{1,2,4\}$ e) $\varnothing$

Tekintsük a síkban az $A(0,-1)$ pontot, a $d_1\colon x-y+1=0$, $d_2\colon 2x-y=0$ egyeneseket és a $B \in d_1$, $C \in d_2$ pontokat úgy, hogy $d_1$ és $d_2$ oldalfelező merőlegesek az $ABC$ háromszögben.

**19.** A $d_1$ és $d_2$ egyenesek metszéspontjának koordinátái:

a) $(-1,2)$ b) $(2,3)$ c) $(1,2)$ d) $(-1,0)$ e) $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$

**20.** A $B$ pont koordinátái: a) $(3,6)$ b) $(0,1)$ c) $(1,2)$ d) $(-1,0)$ e) $(-2,-1)$

Adott a $P = X^{20} + X^{10} + X^5 + 2$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$. Jelölje $R$ a $P$ polinom $(X^3+X)$-szel való osztási maradékát.

**21.** $P(i)$ egyenlő: a) $2+i$ b) $1+i$ c) $2$ d) $i$ e) $0$

**22.** $R$ egyenlő: a) $2+X+X^2$ b) $2+X$ c) $2+X-X^2$ d) $X$ e) $1$

**23.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{x_k - x_k^2}$ egyenlő: a) $\dfrac{15}{2}$ b) $5$ c) $6$ d) $8$ e) $7$

Adott a $\cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x = m$ egyenlet, $m \in \mathbb{R}$.

**24.** Az egyenlet megoldása $x = \dfrac{\pi}{2}$, ha:

a) $m = \dfrac{1}{4}$ b) $m = 1$ c) $m = 0$ d) $m = -1$ e) $m = -\dfrac{1}{4}$

**25.** Az egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $m$ értéke eleme:

a) $[-1,1]$ b) $[-4,4]$ c) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ d) $\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right]$ e) $[-2,2]$

**26.** Ha $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+2x+2} - ax - b = 0$, akkor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ egyenlő:

a) $\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$ b) $(-2,-1)$ c) $(-2,-2)$ d) $(2,-2)$ e) $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$

Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$ függvény, ahol $a$ valós paraméter.

**27.** $f'(0)$ egyenlő: a) $1+a$ b) $a$ c) $1-a$ d) $1$ e) $0$

**28.** Az $f$ függvény grafikonja érinti az $Ox$ tengelyt, ha:

a) $a=2$ b) $a=-1$ c) $a=1$ d) $a=0$ e) $a=3$

**29.** Ha $a=-3$, akkor a $g(x) = |f(x)|$ függvény helyi szélsőértékpontjainak száma $x \in \mathbb{R}$ esetén, egyenlő:

a) $4$ b) $1$ c) $2$ d) $3$ e) $5$

**30.** Ha $a=1$, akkor $(f^{-1})'(2)$ egyenlő:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $0$ e) $+\infty$

**Megoldási kulcs:** **1.** a); **2.** c); **3.** e); **4.** d); **5.** c); **6.** d); **7.** c); **8.** c); **9.** b); **10.** d); **11.** a); **12.** d) **13.** a); **14.** b); **15.** a); **16.** e) **17.** e); **18.** a); **19.** c); **20.** b); **21.** a); **22.** b); **23.** e) **24.** c); **25.** d); **26.** e); **27.** b) **28.** d); **29.** e); **30.** b).

## Megoldások

Összeállította: **Szilágyi Jutka** tanár, Kolozsvár

**1.** Mivel $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}\sin x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin x}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\cos x}{-e^{-\frac{1}{x}}} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}}\sin x = 0$, ezért $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}}\sin x \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}\sin x$, tehát nem létezik $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}\sin x$.

**2.** $2A = \begin{pmatrix} 2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ és $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, ahonnan $2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 2I_2$.

**3.** $A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix} = -4I_2$, ahonnan $A^{48} = (A^4)^{12} = (-4)^{12}\cdot I_2^{12} = 2^{24}\cdot I_2$.

**4.** $A^8 = (A^4)^2 = 16I_2 = \begin{pmatrix} 16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix} \Rightarrow x_8^2 + y_8^2 = 16^2 + 0^2 = 16^2$,

$A^{10} = A^8\cdot A^2 = 16A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -32\\ 32 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x_{10}^2 + y_{10}^2 = 0^2 + 32^2 = 32^2$.

Tehát $\dfrac{x_{10}^2 + y_{10}^2}{x_8^2 + y_8^2} = \left(\dfrac{32}{16}\right)^2 = 2^2 = 4$.

**5.** Keressük azt az $e \in (-1,1)$ számot, amelyre $x * e = e * x = x$, bármely $x \in (-1,1)$ esetén. Mivel a művelet kommutatív, ez az $x * e = x$ egyenlőséggel egyenértékű, azaz $\dfrac{2xe + 3(x+e) + 2}{3xe + 2(x+e) + 3} = x$, bármely $x \in (-1,1)$ esetén, és ez a $(3e+2)(x^2-1) = 0$, bármely $x \in (-1,1)$ esetén összefüggéssel egyenértékű, ami csak akkor teljesül bármely $x \in (-1,1)$ esetén, ha $3e + 2 = 0$, azaz $e = -\dfrac{2}{3} \in (-1,1)$. Tehát a művelet semleges eleme $e = -\dfrac{2}{3}$.

**6.** $f(x*y) = f(x)f(y)$, bármely $x, y \in (-1,1)$ esetén $\iff$

$$\iff a\cdot\frac{1-(x*y)}{1+(x*y)} = a\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot a\cdot\frac{1-y}{1+y} \iff$$

$$\iff a\cdot\frac{3xy+2x+2y+3-2xy-3x-3y-2}{3xy+2x+2y+3+2xy+3x+3y+2} = a^2\cdot\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy} \iff$$

$$\iff a\cdot\frac{xy-x-y+1}{5xy+5x+5y+5} = a^2\cdot\frac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1} \iff$$

$$\iff \frac{a}{5}\cdot\frac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1} = a^2\cdot\frac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1} \iff$$

$$\iff \frac{a}{5} = a^2 \iff a\left(a-\frac{1}{5}\right) = 0, \text{ ahonnan } a = 0 \text{ vagy } a = \frac{1}{5}.$$

Ha $a = 0$, akkor $f(x) = 0$, bármely $x, y \in (-1,1)$ esetén, így $f(x) \notin (0,+\infty)$, tehát nem felel meg annak a feltételnek, hogy a függvény értékkészlete $(0,+\infty)$.

Ha $a = \dfrac{1}{5}$, akkor $1-x > 0$, azaz $1+x > 0$, bármely $x \in (-1,1)$ esetén, így $f(x) \in (0,+\infty)$, bármely $x \in (-1,1)$ esetén. Tehát $a = \dfrac{1}{5}$.

**7.** Mivel az $f$ függvény injektív, $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{10-szer}} = \dfrac{1}{10} \iff f(\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{10-szer}}) = f\left(\dfrac{1}{10}\right)$.

A 6. feladat alapján $a = \dfrac{1}{5}$ esetén $f(\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{10-szer}}) = (f(x))^{10} \iff f\left(\dfrac{1}{10}\right) = (f(x))^{10} \iff$

$$\iff \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{10}}{1 + \dfrac{1}{10}} = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1-x}{1+x}\right)^{10} \iff \frac{9}{55} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{10} \iff \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{10} = \frac{9}{55} \cdot 5^{10}.$$

Mivel $x \in (-1, 1)$, ezért $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$, így $\dfrac{1-x}{1+x} = 5 \cdot \sqrt[10]{\dfrac{9}{55}}$, ahonnan $x = \dfrac{1 - 5 \cdot \sqrt[10]{\dfrac{9}{55}}}{1 + 5 \cdot \sqrt[10]{\dfrac{9}{55}}}$, így az egyenletnek egyetlen megoldása van.

**8.** Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért $\sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$. Ugyanakkor $x \in (\pi, 2\pi)$ alapján $\sin x < 0$, így $\sin x = -\dfrac{4}{5}$.

**9.** Kiszámítjuk a sorozat néhány tagját: $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = a^{\frac{2}{3}}$, $a_3 = a^{\frac{7}{9}}$, $a_4 = a^{\frac{20}{27}}$. Észrevesszük, hogy a sorozat tagjai $a_n = a^{\frac{b_n}{2^{n-1}}}$ alakúak, ez indukcióval igazolható. A rekurzió alapján következik az $a^{\frac{3b_{n+1}}{2^n}} = a^{\frac{2b_n}{2^{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}}$ összefüggés. Innen a $3b_{n+1} = 4b_n + 4b_{n-1}$ rekurenciát kapjuk a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat jellemzésére, ugyanakkor $b_0 = 0$ és $b_1 = 1$. A másodrendű lineáris rekurencia karakterisztikus egyenlete: $3x^2 - 4x - 4 = 0$, melynek gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = -\dfrac{2}{3}$. Tehát a $(b_n)_{n\geq 0}$ sorozat általános tagja: $b_n = A \cdot 2^n + B\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$. A kezdeti feltételekből az $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - \dfrac{2}{3}B = 1 \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldásai $A = \dfrac{3}{8}$ és $B = -\dfrac{3}{8}$.

Így $b_n = \dfrac{3}{8} \cdot 2^n - \dfrac{3}{8} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ és $a_n = a^{\frac{3}{4}\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}$. Tehát $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a^{\frac{3}{4}}$. Az $a^{\frac{3}{4}} = 8$ egyenlőségből $a = 8^{\frac{4}{3}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{8^4} \Rightarrow a = 2^4 \Rightarrow a = 16$.

**10.** Írhatjuk, hogy $\log_3 2 = \dfrac{\lg 2}{\lg 3}$, ugyanakkor $\lg 5 = a$ és $\lg 2 + \lg 3 = b$. A $\log 5 = a$ összefüggést $1 - \lg 2 = a$ alakban írhatjuk, innen $\lg 2 = 1 - a$. A $\lg 2 + \lg 3 = b$ összefüggésből pedig $\lg 3 = b - \lg 2 = b - 1 + a = a + b - 1$. Így $\lg_3 2 = \dfrac{\lg 2}{\lg 3} = \dfrac{1-a}{a+b-1}$.

**11.** $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2 \cdot 9^x + 5^x + 4}{9^{x+1} - 5^x + 2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9^x\left[2 + \left(\dfrac{5}{9}\right)^x + \dfrac{4}{9^x}\right]}{9^x\left[9 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^x + \left(\dfrac{2}{9}\right)^x\right]} = \frac{2}{9}.$$

**12.** $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\alpha^3 = 1 \iff \alpha^3 - 1 = 0 \iff (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$, $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Ugyanakkor $\alpha^4 = \alpha^3 \cdot \alpha = \alpha$, $\alpha^5 = \alpha^3 \cdot \alpha^2 = \alpha^2$, $\alpha^6 = (\alpha^3)^2 = 1$, így $(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^3)(1+\alpha^4)(1+\alpha^5)(1+\alpha^6) = (1+\alpha)(1+\alpha^2) \cdot 2 \cdot (1+\alpha)(1+\alpha^2) \cdot 2 =$ $= 4(1+\alpha)^2(1+\alpha^2)^2 = 4(-\alpha^2)^2(-\alpha)^2 = 4 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^2 = 4\alpha^6 = 4 \cdot 1 = 4$.

**13.** $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x = \ln(x+3)\Big|_1^5 = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2.$

**14.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{u^2(x)+1}\cdot u'(x)\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} u(x)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} e^x\Big|_0^1 =$

$= \operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e - \dfrac{\pi}{4}.$

**15.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x}{(\cos^2 x+\sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x}{1-\dfrac{\sin^2 2x}{2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin 2x\cdot\cos 2x}{2-\sin^2 2x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2-u(x)}\cdot u'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln|2-u(x)|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln|2-\sin^2 2x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2.$$

**16.** Írhatjuk, hogy $\{x\} = \begin{cases} x, & \text{ha}\, x\in[0,1) \\ x-1, & \text{ha}\, x\in[1,2) \\ x-2, & \text{ha}\, x\in[2,3) \\ x-3, & \text{ha}\, x\in[3,\pi) \end{cases}$.

Így $\displaystyle\int_0^{\pi}\{x\}^n\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)^n\mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)^n\mathrm{d}x + \int_3^{\pi}(x-3)^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 +$

$\displaystyle + \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\Big|_1^2 + \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\Big|_2^3 + \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\Big|_3^{\pi} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{(\pi-3)^{n+1}}{n+1} =$

$\displaystyle = \frac{(\pi-3)^{n+1}+3}{n+1}$, és $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\pi}\{x\}^n\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left[(\pi-3)^{n+1}+3\right]}{n+1} = 3.$

**17.** Jelöljük $d$-vel az $[AB]$ felezőmerőlegesét. Így $d$ átmegy az $[AB]$ szakasz $M$ felezőpontján és merőleges az $AB$ egyenesre. Ekkor $x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = 3$ és $y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = 4$, így $M(3,4)$ a felezőpont. Ugyanakkor $m_{AB} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Mivel $d\perp AB$, ezért $m_d\cdot m_{AB} = -1$, ahonnan $m_d = -1$.

Ekkor a $d$ egyenes egyenlete: $y - y_M = m_d(x-x_M) \iff y-4 = -1(x-3) \iff x+y = 7$.

**18.** $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y \iff \lg(x-2y)^2 = \lg xy \iff$

$\iff \lg(x^2-4xy+4y^2) = \lg xy \iff x^2-4xy+4y^2 = xy \iff x^2-5xy+4y^2 = 0.$

Ez utóbbit $y^2$-tel osztva az $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 5\cdot\dfrac{x}{y} + 4 = 0$ egyenlethez jutunk, ahonnan $\dfrac{x}{y} = 1$ vagy $\dfrac{x}{y} = 4$. Ugyanakkor $x>0$, $y>0$, $x-2y>0$ feltételek mellett léteznek csak az alapösszefüggésben megadott logaritmusok, ahonnan $\dfrac{x}{y} > 2$. Így csak az $\dfrac{x}{y} = 4$ arány megfelelő.

**19.** A $d_1$ és $d_2$ egyenesek metszéspontjának koordinátái az $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ egyenletrendszer $x=1$ és $y=2$ megoldásai.

Tehát a metszéspont az $(1,2)$ koordinátájú pont.

**20.** A $d_1$ egyenes egyenlete $y=x+1$. Mivel $B\in d_1$, a $B$ pont koordinátái $B(\alpha,\alpha+1)$. Ekkor az $[AB]$ szakasz $M$ felezőpontjának koordinátái $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1-1}{2}\right)=\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$. Mivel $d_2$ oldalfelező, ezért $M\in d_2$, vagyis $\frac{\alpha}{2}=\alpha\cdot\frac{\alpha}{2}$, ahonnan $\alpha=0$. Így a $B$ pont koordinátái $(0,1)$.

**21.** $P(i)=i^{20}+i^{10}+i^5+2=(i^4)^5+(i^4)^2\cdot i^2+i^4\cdot i+2=1+1(-1)+1\cdot i+2=1-1+i+2=2+i$.

**22.** A maradékos osztás tételét írjuk fel: $P=(X^3+X)q+R$, ahol $\operatorname{gr} R<3$, vagyis $R=ax^2+bx+c$ alakú, ahol $a,b,c\in\mathbb{C}$.

A $P=X(X^2+1)q+R$ összefüggésbe rendre $X=0$, $X=i$, $X=-i$ értékeket helyettesítve $\begin{cases} P(0)=c \\ P(i)=-a+bi+c \\ P(-i)=-a-bi+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ -a+bi+c=2+i \\ -a-bi+c=2-i \end{cases}$. Innen $c=2$, $a=0$ és $b=1$.

Így az $R$ polinom: $R=X+2$.

**23.** Írhatjuk, hogy $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{x_k-x_k^2}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{x_k(1-x_k)}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{x_k}+\frac{1}{1-x_k}\right)=$
$=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{x_k}+\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{1-x_k}$. Ekkor $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{x_k}=\frac{x_2x_3\ldots x_{20}+x_1x_3\ldots x_{20}+\ldots+x_1x_2\ldots x_{19}}{x_1x_2\ldots x_{20}}$, így a Viète-összefüggésekből $\begin{cases} x_2x_3\ldots x_{20}+x_1x_3\ldots x_{20}+\ldots+x_1x_2\ldots x_{19}=(-1)^{19}\cdot\frac{a_1}{a_{20}}=0 \\ x_1x_2\ldots x_{20}=(-1)^{20}\cdot\frac{a_0}{a_{20}}=2 \end{cases}$.

Innen $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{x_k}=0$.

A $P$ polinomban $x=1-y$ helyettesítést végezve a $P(y)=(1-y)^{20}+(1-y)^{10}+(1-y)^5+2=$
$=y^{20}+\ldots+y(-C_{20}^1-C_{10}^1-C_5^1)+1+1+1+2=y^{20}+\ldots-(20+10+5)y+5=y^{20}+\ldots-35y+5$ polinomot kapjuk.

Így $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{1-x_k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{y_k}$, ahol $y_k$ a $P(y)$ polinom gyökei. A Viète-összefüggésekből következik, hogy $\begin{cases} y_2y_3\ldots y_{20}+y_1y_3\ldots y_{20}+\ldots+y_1y_2\ldots y_{19}=(-1)^{19}\cdot\frac{-35}{1}=35 \\ y_1y_2\ldots y_{20}=(-1)^{20}\cdot\frac{5}{1}=5 \end{cases}$.

Tehát $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{y_k}=\frac{35}{5}=7$.

**24.** $x=\frac{\pi}{2}$ gyöke az egyenletnek, vagyis $\cos^3\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\sin^3\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=m\Leftrightarrow m=0$.

**25.** $\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=m\Leftrightarrow\frac{\sin 2x}{2}\cdot\cos 2x=m\Leftrightarrow\sin 4x=4m$. Az egyenletnek akkor és csak akkor vannak gyökei, ha $4m\in[-1,1]\Leftrightarrow m\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$.

**26.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-ax-b\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)=l$$

Ha $a+2<0$, akkor $l=+\infty$. Ha $a+2>0$, akkor $l=-\infty$. Így a feladat feltételét csak az $a=-2$ teljesítheti.

Ekkor $l=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+2}+2x-b)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[(\sqrt{x^2+x+1}+x)+(\sqrt{x^2+2x+2}+x)-b\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}-b=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}-b=$$

$=-\frac{1}{2}-1-b=-b-\frac{3}{2}$. Az $l=0$ feltételből $b=-\frac{3}{2}$.

Tehát az $(a,b)=\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ számpárra teljesül a megadott feltétel.

**27.** $f'(x)=3x^2+a$ bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén, ahonnan $f'(0)=a$.

**28.** Az $Ox$ tengely akkor és csakis akkor érintője az $f$ grafikus képének, ha létezik olyan $\alpha\in\mathbb{R}$, amelyre $f(\alpha)=0$ és $f'(\alpha)=0 \iff \alpha^3+a\alpha=0 \quad (1)$ és $3\alpha^2+a=0 \quad (2)$.

Az (1) összefüggésből $\alpha=0$ vagy $\alpha^2+a=0$.

Ha $\alpha=0$, akkor (2) alapján $a=0$.

Az $\alpha^2+a=0$ egyenlőség csak $a\le 0$ esetén teljesülhet. Ekkor $\alpha^2=-a$, és (2) alapján $a=0$.

**29.** Ha $a=-3$, akkor $f(x)=x^3-3x$ és

$$g(x)=|x^3-3x|=\begin{cases}-x^3+3x, & \text{ha } x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})\\ x^3-3x, & \text{ha } x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)\end{cases}$$

Elkészítjük az $f$ függvény előjeltáblázatát.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Mivel $g_b'(-\sqrt{3})=-9+3=-6$, $g_j'(-\sqrt{3})=9-3=6$; $g_b'(0)=0-3=-3$, $g_j'(0)=-3\cdot 0+3=3$; $g_b'(\sqrt{3})=-9+3=-6$, $g_j'(\sqrt{3})=9-3=6$, ezért a $g$ függvény az $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$ intervallumon deriválható és

$$g'(x)=\begin{cases}-3x^2+3, & \text{ha } x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})\\ 3x^2-3, & \text{ha } x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)\end{cases}.$$

A $g'$ függvény gyökei a $3x^2 - 3 = 0$, $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ és a $-3x^2 + 3 = 0$, $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ egyenletek megoldásai, vagyis $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.

A $g'$ függvény előjeltáblázata:

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
x & -\infty & & -\sqrt{3} & & -1 & & 0 & & 1 & & \sqrt{3} & & +\infty \\
\hline
g'(x) & & - & | & + & 0 & - & | & + & 0 & - & | & + & \\
g(x) & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow &
\end{array}$$

A függvényváltozás táblázata alapján a $-\sqrt{3}$, $0$ és $\sqrt{3}$ pontok helyi minimumpontok, a $-1$ és $1$ pontok pedig helyi maximum pontok. A függvénynek öt helyi szélsőértékpontja van.

**30.** $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, ahol $f(x_0) = y_0$.

Így $f(x_0) = 2 \iff x^3 + x - 2 = 0 \iff (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \iff x = 1$.

Tehát $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$.