

## A matematika világából

**RAMANUJAN ÉS 1729**  
**100 éve halt meg Srinivasa Ramanujan (1887–1920)**

Sándor József docens, BBTE, Kolozsvár

Srinivasa Ramanujan indiai matematikus 1887. december 22-én született Erode városban (dél-kelet India Tamil Nadu tartományában), 400 km-re Madrastól (ma Chennai). Ramanujan élettörténete (lásd [6], [7]) amennyire inspiráló, annyira tragikus is. Fiatal korától kezdve megnyilvánult zsenialitása és szenvedélye a matematika iránt, de nagyjából egyedül és szegénységben kellett fejlesztenie tudását és tehetségét. 15 éves korában kezdte tanulmányozni G. S. Carr: *Synopsis of elementary results in pure mathematics* (London, 1880) nevezetes könyvét, amely több, mint 4000 matematikai eredményt mutat be. Mivel ebben a könyvben igen rövid (egysoros utalások) bizonyítások vannak, Ramanujan dolgozataiban majdnem (vagy teljesen) hiányoztak a szigorú bizonyítások. Rengeteg új eredményét jegyzetfüzeteibe írta le, és az ott található szokatlan, néha megdöbbentő eredményeket nehézkes és sok munkával később másoknak kellett igazolniuk. Habár Ramanujan első eredményeit publikálta a *Journal of the Indian Mathematical Society* folyóiratban, eredményeit nehezen lehetett megérteni.

Több angol matematikus közül, akinek elküldte eredményeit, egyedül G. H. Hardy (1877–1947) válaszolt, aki 1913 januárjában kezdte eredményeit megvizsgálni J. E. Littlewooddal (1885–1977) közösen. Meghívásukra 1914 áprilisában érkezett meg Cambridgebe, három hónappal az első világháború kitörése előtt. Magával vitte jegyzetfüzeteit több ezer tétellel, melyeket 1903–1914 közt fedezett fel. Ramanujan két évvel később Cambridgeben doktorátust szerzett, míg 1918-ban a Royal Society tagjai közé választotta, főleg az elliptikus függvények és a számelmélet terén elért eredményeiért.

Teljesen vegetáriánus életmódot folytatott, és a háborús viszonyok között, valamint az angliai éghajlat miatt gyakran betegeskedett. Betegsége 1919 februárjában annyira elhatalmasodott, hogy kénytelen volt hazatérni Indiába, ahol 32 évesen április 26-án halt meg.

Ramanujan három jegyzetfüzetet és egy úgynevezett *Elveszett jegyzetfüzetet* (*lost Notebook*) hagyott maga után. Ez utóbbit G. E. Andrews amerikai matematikus fedezte fel, aki egyedül, illetve B. C. Berndt neves matematikussal közösen kiadták sorozatban ezeket a jegyzetfüzeteket (sok bizonyítással együtt).

Hogy Hardy mennyire zseniális matematikusnak tartotta Ramanujant, arról Erdős Pál egyik visszaemlékezéséből alkothatunk fogalmat. Erdős mesélte el, hogy Hardy-val való egyik találkozása alkalmával a következőt mondta: „Tegyük fel, hogy szabályozzuk a matematikusokat tiszta tehetségük alapján egy 100-as skálán. Ekkor Hardy szerint ő maga a skálán 25 pontot, Littlewood 30-at, Hilbert 80-at, Ramanujan pedig 100-at kapna.”

Ramanujan több eredményéről olvashatunk [7]-ben is.

Egy híres legenda szerint, egyszer amikor Hardy meglátogatta a kórházban Ramanujant, azért, hogy elindítsa valamivel a beszélgetést, azt mondta, hogy a taxi száma, amellyel jött 1729, és elég jelentéktelen számnak tűnik. Erre Ramanujan válaszolt: „Nem Hardy, ez egy nagyon érdekes szám! A legkisebb szám, ami felírható két köb összegeként, két különböző módon” ( $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$  (\*)). Azóta ezt a számot *Hardy–Ramanujan számnak* is hívják.

Ezt a legendát mindig kétkedéssel fogadtam. Ismert, hogy az  $x^3 + y^3 = z^3 + t^3$  egyenlet megoldásaival már Euler foglalkozott. Tehát a (\*) egyenlőséget valószínűleg már korábban is ismerték. És valóban, Fermat és Wallis-szal való levelezéseiből kiderült, hogy ezt az egyenlőséget egy Frénicle de Bessy nevű francia matematikus 1657-ben fedezte fel. Mondhatjuk, hogy

Ramanujan nem ismerte Euler és Frénicle de Bessy idevágó munkásságát. De 2015-ben Ken Ono és Andrew Granville neves számelméleti kutatók, a Cambridge Trinity College könyvtárában Ramanujan kéziratái között lapozgatva, megtalálták leírva a híres (\*) egyenlőséget (lásd [4], [5]).

Azonban Ramanujan jóval továbbment a (\*) egyenlőségénél. Felfedezett egy elméletet az  $x^3 + y^3 = z^3 \pm 1$  egyenletek végtelen sok megoldására, és felfedezte kapcsolatukat az úgynevezett K3 felületekkel, megelőzve korát legalább 40 évvel (lásd a [4] dolgozatot részletekért). Ezáltal az elliptikus görbékkel való kapcsolatot is kimutatta, amely oly fontos volt később a Fermat-féle sejtés ( $x^n + y^n = z^n$  megoldhatatlansága, ha  $n \geq 3$ ) bizonyításában.

Másik kételyem az volt, hogy Hardy is neves számelméletész lévén, hogyan lehetséges, hogy nem vette észre az 1729 szám érdekességeit. A továbbiakban felsoroljuk néhány más meglepő tulajdonságát ennek a számnak:

1) 1729 osztható számjegyeinek összegével:  $1 + 7 + 2 + 9 = 19$  és  $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ . (Ezeket a számokat *Harshad-féle* számoknak is nevezik.)

2) 1729 számtani közepe az eddig ismert  $k! + 1$  alakú számoknak, amelyek ugyanakkor prímszám-négyzetek is:

$$4! + 1 = 5^2 = 25; 5! + 1 = 11^2 = 121; 7! + 1 = 71^2 = 5041 \text{ és } 1729 = \frac{25 + 121 + 5041}{3}.$$

3) 1729 a harmadik *Carmichael-féle szám* (561 és 1105 után), azaz pszeudoprím minden alapra nézve.

4) Kezdve az  $e$  (*Euler-féle*) szám 1729. számjegyétől, a következő tíz számjegye 0719425863. Először fordul elő, hogy sorban, egymás után mind a tíz számjegy előforduljon, ismétlődés nélkül! (lásd [3])

### Szakirodalom

- [1] S. Ramanujan, G. E. Andrews: *The lost notebook and other unpublished papers*, Springer, Berlin, 1988
- [2] M.D. Hirschhorn: An amazing identity of Ramanujan, *Math. Magazine* 68 (1995), no. 3., 199-201. old.
- [3] [mathpages.com/home/kmath028/kmath028.htm](http://mathpages.com/home/kmath028/kmath028.htm)
- [4] K. Ono, S. Trebat-Leder: The 1729 K3 surface, arXiv:1510.0073555 (22. aug. 2016.)
- [5] M. Freiberger: Ramanujan surprises again, [plus.math.org/content/ramanujan](http://plus.math.org/content/ramanujan)
- [6] Sándor József: O sută de ani de la nașterea lui Srinivasa Ramanujan, *Gamma* 9 (1987), 42-45. o.
- [7] Sándor József: Ramanujan matematikai munkássága és hagyatéka, *Erdélyi Matematikai Lapok* 5 (2004), no. 2., 3-8. old.