ELEMI OSZTÁLYOS TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK*

E: 166. Egy sportversenyen háromszor több fiú indult, mint lány. A verseny során 3 fiú és 3 lány feladta a versenyzést, így ötször kevesebb lány maradt, mint fiú. Hány fiú és hány lány fejezte be a versenyt?

***

E: 167. a) Hány számjegye van az A számnak, ha

$$A = 1223334444\ldots\underbrace{1010\ldots10}_{\text{10-szer}}\underbrace{1111\ldots11}_{\text{11-szer}}?$$

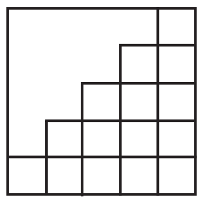
b) Adott a 10, 221, 3332, 44443, 555554, … számsorozat. Mennyi a sorozat 100. tagja számjegyeinek összege?

***

E: 168. Határozzuk meg azt a két természetes számot, amelyekre teljesülnek a következő tulajdonságok: ha a második számhoz hozzáadunk 99-et, akkor az összeg éppen az első szám, ha az első számhoz hozzáadunk 246-ot, akkor az összeg a második szám hatszorosa.

***

E: 169. Hány négyzet látható a mellékelt ábrán?

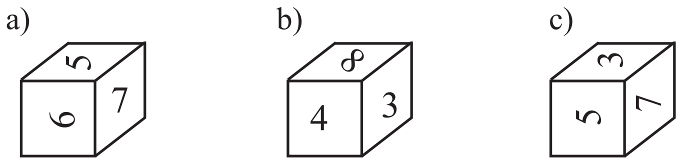


***

---

*Ezekre a feladatokra minden I-V. osztályos tanuló küldhet megoldásokat, amelyeket **2020. április 20-ig fogadunk el. A feladatok megoldásához az elemi osztályokban tanult módszereket alkalmazzuk!**

E: 170. Egy kocka lapjaira a 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat írtuk. A kocka három különböző helyzetben látható az ábrákon. Hányas szám van a kocka alsó lapján az egyes esetekben?



***

ÁLTALÁNOS ISKOLÁS TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK**

V. osztály

A: 4166. Adott a 14, 17, 50, 25, 29, 85, 89, ... számsorozat.

a) Határozzuk meg, hogy milyen szabály szerint követik egymást a számok, és írjuk fel a számsorozat következő nyolc tagját.

b) Melyik a számsorozat 2020. tagja?

c) Mennyi a számsorozatban szereplő különböző négyzetszámok összege?

d) Számítsuk ki a számsorozat első 2020 tagjának összegét.

Vasile Şerdean tanár, Szamosújvár

A: 4167. Írjuk fel a 333 számot legalább két olyan szám összegeként, amelyekben csak a 3 számjegy szerepel. Hányféle felírás lehetséges?

***

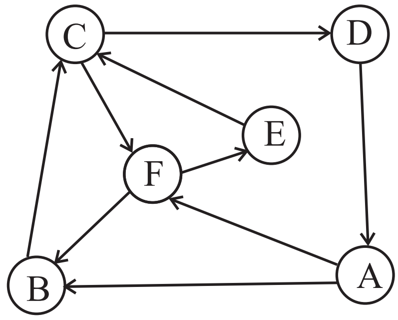
A: 4168. a) Számítsuk ki:

$$A = \frac{1}{31} + \frac{2}{31} + \ldots + \frac{30}{31} + \frac{1}{32} + \frac{2}{32} + \ldots + \frac{31}{32} + \frac{1}{33} + \frac{2}{33} + \ldots + \frac{32}{33} + \frac{1}{34} + \frac{2}{34} + \ldots + \frac{33}{34}.$$

b) Határozzuk meg a p természetes számokat, amelyekre $B = \dfrac{5^p + 6^p + 7^p}{2^p + 3^p + 4^p}$ természetes szám.

***

A: 4169. Az A, B, C, D, E, F pontok egy erdőben a téli etetők helyét jelölik, a nyilak pedig az őket összekötő utakat. A vadőr minden úton egyszer ment végig, a nyíl irányában. Honnan indult és hova érkezett a vadőr? Melyik etetőnél volt egy alkalommal és melyiknél kétszer? Milyen sorrendben járhatta végig az etetőket?



***

Minden V-VIII. osztályos tanuló küldhet megoldásokat, osztálya és az *azt megelőző osztályok* számára kitűzött feladatokra. A IX. osztályos tanulók a VII-VIII., a X. osztályos tanulók pedig a VIII. osztály számára kitűzött feladatok megoldásait küldhetik be. **Megoldásokat 2020. április 20-ig fogadunk el. Kérjük az összesítőlapon a tanár nevét feltüntetni!

A: 4170. Bolha Béla a számegyenesen ugrál, a nullától indul. Először pozitív irányba 7 egység hosszúságút, majd ellenkező irányba 4 egység hosszúságút, és ismét pozitív irányba 5 egység hosszúságút ugrik. A továbbiakban ezt a három ugrást ismételgeti, ugyanilyen sorrendben. Hányadik ugrással jut Bolha Béla olyan pontra a számtengelyen, amely a legközelebb van a 2020-szal jelölt ponthoz?

***

VI. osztály

A: 4171. Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyeket 17-tel osztva 3-szor nagyobb hányadost kapunk, mint amekkora a maradék, 11-gyel osztva pedig 7-szer akkora hányadost kapunk, mint amekkora a maradék.

Simon József tanár, Csíkszereda

A: 4172. Ha a, b, c, d, e, f és g különböző számjegyeket jelölnek, akkor határozzuk meg, hogy mennyi lehet az $A = a + bc + d + a - b + e + f + g$ szám legkisebb és legnagyobb értéke.

***

A: 4173. Az ABC háromszög AB, BC, AC oldalai egyenesen arányosak a 9, 6, 11 számokkal. A CB félegyenesen felveszünk egy M pontot úgy, hogy az ACM és ABC háromszögek területének aránya $\frac{8}{3}$, kerületük aránya pedig $\frac{19}{13}$ legyen. Igazoljuk, hogy ACM háromszög egyenlő szárú.

Vasile Şerdean tanár, Szamosújvár

A: 4174. a) Egy egyenlő szárú háromszögben meghúzzuk az egyik szárhoz tartozó magasságot, amelynek a másik szárral bezárt szöge 13°-kal kisebb, mint az alapon fekvő szög. Mekkorák a háromszög szögei?

b) Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja BC. A háromszög felvágható négy olyan nem kongruens egyenlő szárú háromszögre, amelynek szárai BC hosszúságúak. Hány fokosak az ABC háromszög szögei?

***

A: 4175. Barnabás és Bendegúz repülőn utaznak. Barnabás ezt mondja: „Ha ebben a pillanatban a levegőben levő utasszállító repülők száma nagyobb, mint bármelyik repülőn levő utaslétszám, akkor van legalább két repülő, amelyiken ugyanannyi utas van." Bendegúz gondolkozott egy kicsit, majd azt mondta: „Igazad van, egy sajátos esetet kivéve." Hogy gondolkozott a két fiú?

***

VII. osztály

A: 4176. Hány olyan $n \in \mathbb{N}^*$ szám van, amelyre $M = \frac{7n-5}{4}$ és $N = \frac{5n+7}{4}$ egyidőben egész szám?

***

A: 4177. Az ABC háromszögben $DE \parallel AB$, ahol D az AC szakasz, E pedig a BC szakasz egy pontja. Legyen $T_{ABC} = T$, $T_{BDC} = T_1$ és $T_{EDC} = T_2$. Igazoljuk, hogy $T + T_2 > 2T_1$.

Deák Imre tanár, Székelyudvarhely

A: 4178. Az egymástól 300 km távolságra fekvő A és B városokból ugyanabban a pillanatban két gépkocsi indul el egymással szembe: az A-ból induló sebessége 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a B-ből indulóé pedig 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Addig járnak oda-vissza megállás nélkül, amíg egyszerre érkeznek meg a kiindulási pontjukba.

a) Határozzuk meg a találkozások helyeinek távolságát az A várostól. Mennyi idő telik el minden egyes találkozásig?

b) Hányszor találkoznak a gépkocsik ez idő alatt?

c) Mennyi idő múlva érkeznek vissza a kiindulási pontjukba?

Simon József tanár, Csíkszereda

A: 4179. Egy háromszög egyik oldalának hossza a másik két oldal hosszának számtani közepe. A leghosszabb oldalon fekvő szögek belső szögfelezőinek metszéspontja a legrövidebb oldalra húzott szögfelezőt $\frac{5}{2}$ arányban osztja. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát, ha tudjuk, hogy a háromszög kerülete 21 cm.

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

A: 4180. Töltsük ki az ábrán látható bűvös négyzetet, tudva, hogy a sorokban, oszlopokban és az átlók mentén álló három-három szám összege állandó.

	2023	
2025		2024

***

VIII. osztály

A: 4181. Legyen a egy pozitív valós szám, amelyre $(a-2026)\sqrt{a}=45$. Számítsuk ki $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$ és $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$ értékét.

Vasile Şerdean tanár, Szamosújvár

A: 4182. Határozzuk meg azokat az x egész számokat, amelyekre az

$$E(x)=\frac{x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1}{x^5+4x^4+3x^3+x^2+4x+3}$$

tört létezik és egész értékeket vesz fel.

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

A: 4183. Az $ABCA'B'C'$ szabályos háromoldalú hasáb alapélének hossza 4 cm, magassága pedig 12 cm. Az AA', BB', CC' oldaléleken felvesszük az M, N, illetve P pontokat úgy, hogy $AM=MA'$, $BN=3NB'$ és $3CP=PC'$. Legyen d az (ABC) és (MNP) síkok közös egyenese.

a) Ha $d\cap BC=\{D\}$ és $d\cap AC=\{E\}$, igazoljuk, hogy a CDE háromszög derékszögű.

b) Számítsuk ki az MNP háromszög területét.

***

A: 4184. Adottak az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x+3$ és $g(x) = x+7$ függvények. Ábrázoljuk az f és g függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben, és igazoljuk, hogy grafikus képeik egymásra merőleges egyenesek.

***

A: 4185. Egy urnában 101 golyó van. Márton, Nándor és Péter – ebben a sorrendben – golyókat vesznek ki az urnából, egymás után többször. Egy alkalommal 2, 3 vagy 4 golyót vehetnek ki, és senki nem vehet annyit, mint a közvetlenül előtte vevő. A játék végén az a vesztes, akinek elsőként nem marad golyó az urnában, a másik kettő nyertes. Van Péternek nyerő stratégiája?

***

LÍCEUMI TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK[§]

IX. osztály

L: 3130. Bizonyítsuk be, hogy ha az $E(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + 2x^2 - 9x + 3}{x^4 - 4x^2 + 2x + 3}$ kifejezésbe az x helyébe az $x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$ egyenlet bármely gyökét helyettesítjük, akkor a helyettesítési érték minden esetben ugyanaz a szám.

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

L: 3131. A természetes számokból álló szigorúan növekvő $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot így értelmezzük: $a_1 = 1$ és ha $n \geq 2$ akkor a_n az a legkisebb $m > a_{n-1}$ természetes szám, amelyre $(a_{n-1}+m)$ teljes négyzet.

Mutassuk meg, hogy:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} < 2$, bármely $n \geq 1$ esetén;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \frac{a_{n+1} - 1}{2}$, bármely $n \geq 1$ esetén;

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, bármely $n \geq 1$ esetén.

Jakab Tibor tanár, Sepsiszentgyörgy

[§] A IX. osztályos tanulók a VII-IX. osztályok, a X. osztályos tanulók a VIII-X. osztályok, a XI-XII. osztályos tanulók a IX-XII. osztályok számára kitűzött feladatokra küldhetnek megoldásokat, **2020. április 20-ig.** A $^{\Delta}$-gel jelzett feladatokra minden líceumi tanuló küldhet megoldásokat, osztályától függetlenül. Kérjük az összesítőlapon a tanár nevét feltüntetni!

L: 3132. Bizonyítsuk be, hogy egy trapéz alapjaival és az átlók metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos szelővel olyan háromszög szerkeszthető, amelyben a magasságok hosszai számtani haladványban vannak.

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

L: 3133$^{\Delta}$. Az $1, 2, \ldots, 100$ számok közül kiválasztottunk 52 számot. Bizonyítsuk be, hogy van köztük három különböző x, y és z szám, amelyekre $x + y = z$.

Schefler Barna egyetemi hallgató, Budapest

X. osztály

L: 3134. A pozitív valós számok halmazán oldjuk meg az $(x^2+1)(x+1) = (2x^2+7x+2)\sqrt{x}$ egyenletet.

Longáver Lajos tanár, Nagybánya

L: 3135. Adott az $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ halmaz.
a) Bizonyítsuk be, hogy $(|z+1| - \sqrt{2})(|z-1| - \sqrt{2}) \leq 0$, bármely $z \in A$ esetén.
b) Bizonyítsuk be, hogy bármely $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in A$ esetén létezik a „$\pm$" előjel olyan megválasztása, amelyre $\sum\limits_{k=1}^{12} |z_k \pm 1| < 17$.

***

L: 3136. Bizonyítsuk be, hogy $2\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \arcsin\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$.

Kovács Bálint egyetemi hallgató, Budapest

L: 3137$^{\Delta}$. Egy bajnokság döntőjében öt úszó vett részt: A, B, C, D és E. Ha azt tippeltük, hogy a versenyzők helyezési sorrendje $ABCDE$ lesz, akkor egyetlen versenyző helyezését sem találtuk el, és azt sem, hogy milyen sorrendben következett két egymás utáni helyezett. Ha viszont a $DAECB$ sorrendre tippeltünk, akkor két versenyző helyezése megegyezett a ténylegessel, és két esetben az is, hogy milyen sorrendben követte egymást két versenyző. Mi volt a verseny eredménye?

***

XI. osztály

L: 3138. Adott az $x^2 - 5y^2 = 2020$ egyenlet. Adjuk meg az egyenlet három különböző egész megoldását. Igazoljuk, hogy az egyenletnek végtelen sok racionális megoldása van.

Kovács Béla tanár, Szatmárnémeti

L: 3139. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixok, amelyekre $A^3 = (AB)^3 = I_2$.
a) Bizonyítsuk be, hogy $(BA)^3 = I_2$.
b) Ha $A \neq I_2$, $B \neq I_2$ és $AB = BA$, akkor $(B - A)(B - A^2) = O_2$.

***

L: 3140. Határozzuk meg az a, b és c valós számokat úgy, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{ax^2 + bx + c} - 2x - 3) = 2020.$$

***

L: 3141$^\Delta$. Az $ABCD$ négyzet AB, illetve CD oldalának belsejében vegyünk fel n-n pontot. Az így felvett $2n$ pont közül kössük össze egy szakasszal azokat, amelyek különböző oldalon vannak. Tegyük fel, hogy az így keletkezett n^2 szakaszra igaz, hogy semelyik három nem metszi egymást ugyanabban a pontban a négyzet belsejében. Hány részre esik szét a négyzet, ha szétvágjuk ezen szakaszok mentén?

Schefler Barna egyetemi hallgató, Budapest

XII. osztály

L: 3142. Adott $(G, \cdot)$ egy véges csoport és a egy rögzített elem G-ből. Ha létezik az $f\colon G \to G$ szürjektív függvény úgy, hogy $f(x^3) = f(axa)$ bármely $x \in G$ esetén, akkor bizonyítsuk be, hogy:

a) $(G, \cdot)$ Abel-csoport;

b) létezik a $k \in \mathbb{N}$ szám úgy, hogy $\operatorname{ord}(G) = 2^k$.

***

L: 3143. Adott az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ deriválható függvény úgy, hogy $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ és $f'(x) \geq 1$, bármely $x \in [0,1]$ esetén.

a) Adjunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre.

b) Mutassuk ki, hogy $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)+1}\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}$.

***

L: 3144. Számítsuk ki: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x(1-\sin 2x)(2-\sin 2x)}\mathrm{d}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Kovács Béla tanár, Szatmárnémeti

L: 3145$^\Delta$. Legyen $H = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Határozzuk meg azt a legkisebb n egész számot, amelyre igaz, hogy H minden n-elemű részhalmaza tartalmaz öt olyan számot, amelyek páronként relatív prímek.

***