LÍCEUMI TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK[§]

IX. osztály

L: 3146. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y^8 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 136.$$

Bencze Mihály tanár, Brassó

L: 3147. a) Bizonyítsuk be, hogy $(1+x)^n + \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$, bármely $x > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén.

b) Mutassuk ki, hogy $(\sqrt{2})^{2020} + (2+\sqrt{2})^{2020} \geq 2^{2021}$.

***

L: 3148. Legyen M az $ABCD$ négyzet (AB) oldalának felezőpontja és $P \in (BC)$ egy tetszőleges pont. Az AB egyeneshez viszonyítva az E pont ugyanabban a félsíkban található, mint D, valamint tudjuk, hogy $EM \perp MP$ és $EM = 2MP$. Bizonyítsuk be, hogy C, D, E kollineáris pontok.

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

L: 3149$^{\Delta}$. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelynek 90 pozitív osztója van és ezek közül legalább 10 egymást követő szám.

***

X. osztály

L: 3150. Hány valós megoldása van a

$$|x| + ||x|-1| + ||x|-2| + \ldots + ||x|-20| = 210\cos 2\pi x$$

egyenletnek? Adjuk meg az összes megoldás számát (de nem a megoldásokat) részletes indoklással, elfogadható egyes részekben grafikus magyarázat is.

Gecse Frigyes tanár, Kisvárda

L: 3151. Legyen $z \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $|z| = 1$ és $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\varepsilon^3 = 1$. Jelölje $a = |z-1|$, $b = |z-\varepsilon|$ és $c = |z-\varepsilon^2|$. Mutassuk ki, hogy $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 0$.

Longáver Lajos tanár, Nagybánya

L: 3152. Számítsuk ki az $S = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\operatorname{tg}\left(a - \dfrac{k\pi}{n}\right)\operatorname{tg}\left(a - \dfrac{(k+1)\pi}{n}\right)\right]$ összeget, ha tudjuk, hogy $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

[§]A IX. osztályos tanulók a VII-IX. osztályok, a X. osztályos tanulók a VIII-X. osztályok, a XI-XII. osztályos tanulók a IX-XII. osztályok számára kitűzött feladatokra a megoldásokat **2020. május 18-23.** között küldhetik a `matlap2007@yahoo.com` címre. A $^{\Delta}$-gel jelzett feladatokra minden líceumi tanuló küldhet megoldásokat, osztályától függetlenül. Kérjük az összesítőlapon a tanár nevét feltüntetni!

L: 3153$^\Delta$. A $p \geq 5$ prímszámot *pitagoraszi*nak hívjuk, ha felírható két teljes négyzet összegeként.

a) Adjunk példát három pitagoraszi prímre.

b) Ha $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pitagoraszi prímek, akkor igazoljuk, hogy $n^2 + p_1^2 + \ldots + p_n^2 - n + 2$ nem teljes négyzet.

Bencze Mihály tanár, Brassó

XI. osztály

L: 3154. Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a-a^2-1}{b} & 1-a \end{pmatrix}$ mátrix, ahol $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$.

Bizonyítsuk be, hogy:

a) A^{2^n} invertálható és $\left(A^{2^n}\right)^{-1} = A^{2^{n-1}}$, bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén;

b) $\det\left(\sum_{k=0}^{6n+6} (-1)^k A^{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{6n+6} (-1)^k \det(A^{k+1})$.

Bencze Mihály tanár, Brassó

L: 3155. Tekintsük az F_n Fibonacci-számokat: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, ahol $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2F_{2i-1}^2 - F_{i+1}} = F_n$.

Zdravko F. Starc tanár, Vršac, Szerbia

L: 3156. Az α valós szám milyen értékére lesz a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha \left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)$ értéke nem nulla valós szám?

Schefler Barna egyetemi hallgató, Budapest

L: 3157$^\Delta$. Egy urnába nyolc különböző színű golyót helyezünk. Kihúzunk egyet és visszatesszük. Ezt összesen tízszer végezzük el.

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ily módon mindegyik golyó legalább egyszer a kezünkbe kerüljön.

***

XII. osztály

L: 3158. Legyen p prímszám, illetve a, b és n olyan egész számok, hogy $n > 0$, $(a, p) = (b, p) = 1$ és $p^n \mid a^p - b^p$. Mutassuk meg, hogy $p^{n-1} \mid a - b$.

Kovács Bálint egyetemi hallgató, Budapest

L: 3159. Legyen H zárt részhalmaza a $\mathbb{C}^*$ halmaznak a szorzásra nézve, és $r > 0$ egy valós szám. Mutassuk ki, hogy:

a) Ha $H \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, akkor $r = 1$.

b) Ha a H halmaz véges, akkor H csoport a komplex számok szorzására nézve.

***

L: 3160. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\int\limits_{\frac{1}{2020}}^{3} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}\,\mathrm{d}x < 2 + \ln 3.$$

Kovács Béla tanár, Szatmárnémeti

L: 3161$^{\Delta}$. Egy $(a+2)\times(b+2)$-es táblázatnak levágjuk a négy 1×1 méretű sarkát. Az így kapott csonka táblázat első és utolsó sorának, illetve első és utolsó oszlopának minden mezőjére egy-egy tetszőleges valós számot írunk. Igazoljuk, hogy a táblázat maradék $a\times b$ méretű belseje egyértelműen kitölthető valós számokkal úgy, hogy minden ide eső szám megeggyezzen a négy szomszédjának átlagával.

***