**Műhelysarok**

# KÖNNYŰ VAGY NEHÉZ EGY ADOTT FELADAT?*

**Olosz Ferenc** tanár, Szatmárnémeti

Gyakran elhangzik egy-egy feladatról, hogy könnyű, közepes, nehéz, vagy nagyon nehéz. Feltevődik a kérdés, hogy milyen kritériumok alapján soroljuk a feladatokat egyik vagy másik nehézségi szintbe? Mint minden minősítés, ez is szubjektív. Amire az egyik diák, vagy tanár azt mondja, hogy könnyű, az a másiknak lehet közepes vagy akár nehéz is.

A tanulók aszerint ítélik meg egy-egy feladat nehézségét, hogy sikerült-e vagy sem önállóan megoldani, és mennyi ideig kellett törjék rajta a fejüket. A tanárok a tanórákon előforduló feladatokat természetszerűen meg tudják oldani, ezért ők kialakítják maguknak a közepes szintű feladat képét, és ehhez viszonyítva minősítik a feladatokat könnyűnek, illetve nehéznek. Nyilván azok a feladatok, amelyek a tanároknak is fejtörést okoznak, a tanulók többségének is nehéznek bizonyulnak. A tantervekből és az országos felmérőkből kiderül, hogy melyek azok a feladatok, amelyeknek megoldását a tanulók többségétől elvárjuk. Az órán tanított típusfeladatok többsége könnyű és közepes szintű. A közepes szintű feladatok körének behatárolásában segítenek azok a tankönyvek és feladatgyűjtemények, amelyeknek feladatai fokozatosan nehezednek, de sokat segítenek a kortárs és az előző tanárgenerációk véleményei is.

Folyamatosan ellenőriznünk kell, hogy mennyire reálisan tudjuk minősíteni a feladatokat, vagyis az általunk könnyűnek vagy közepesnek tartott feladatokat a tanulók mennyire könnyűnek vagy közepesnek találják az órai munkában, a házi feladatokban és a különböző felmérőkben. A tanulók feladatmegoldói képességeinek pontos ismerete hozzásegít ahhoz, hogy kellő ütemben és megfelelő sorrendben tudjuk adagolni a feladatokat.

A tanár a fejezetvégi felmérőknél és a félévi dolgozatoknál könnyű és közepes nehézségű feladatok megoldását kéri, nehezebb feladatokat csak akkor tűz ki, ha azt az osztály színvonala megengedi. A felmérők feladatainak kiválasztására nagyon gazdag forrásanyag áll a rendelkezésünkre. A nehezebb és nehéz feladatok tanórákon való megoldásának is fontos szerep jut, mert a jobb tanulók számára ezek jelentenek igazi kihívást, ezek biztosítják a szellemi fejlődésüket. Ennek megvalósítására a differenciált foglalkozások biztosítanak megfelelő keretet.

Amikor versenyekre feladatsorokat állítunk össze, akkor már igényesebb feladatokat kell keressünk, és bizony ezen a téren is kellő tapasztalatokat kell szerezzünk. A versenyekre kiírt feladatok nehézsége aszerint változik, hogy azok iskolai, városi, körzeti, megyei, megyeközi, országos vagy nemzetközi szintre készültek.

Az iskolai, városi, körzeti versenyeknél gyakran előfordul, hogy egyes tanárok túlzottan nehéz feladatsorokat állítanak össze, nem veszik figyelembe, hogy az illető szinten mit lehet elvárni a versenyre jelentkező tanulók többségétől. Ezek a tanárok attól félnek, hogy a kollégák megszólják őket, ha könnyebb feladatokat is kitűznek. A versenyzők túlzott nehézségű feladatokkal való tesztelése nemegyszer oda vezetett, hogy nem a megoldások pontosságával és szépségével lehetett eldönteni, hogy kik a legjobbak, hanem azzal, hogy kinek a dolgozatában találtak egy-egy értelmesebb próbálkozást vagy megoldásmorzsát.

Az igényesebb versenyeknél azért is nehéz megfelelő feladatsort összeállítani, mert a kért ismeretek köre lazán van behatárolva, és nem lehet előrelátni, hogy mennyire lesz erős a mezőny, mennyire felkészültek a versenyzők.

Amióta az Erdélyi Magyar Matematika Verseny (EMMV) és a nálunk rendezett Nemzetközi Magyar Matematika Verseny (NMMV) lebonyolítását az oktatásügyi minisztérium

*Elhangzott a Magyar Tudomány Napja Erdélyben rendezvénysorozat keretében 2015. november 14-én.

végzi, azóta e versenyek megszervezése szigorú szabályok szerint történik. Így például a feladatsorok összeállítói a verseny helyszínén rohamtempóban, és olykor stresszes körülmények között kell a tételeket kidolgozzák. Gyakori, hogy nem jut idejük a feladatok önálló (szerzőtől független) megoldására, így csak a szerzői megoldások átnézésére (esetleg a már kiválasztott feladatok újraoldására) vállalkozhatnak. Egy készen megoldott feladat egy idegennek nem mindig ad reális képet annak megoldási nehézségeiről, elérhetőségéről (általában könnyebbnek tűnnek így a feladatok, mint amikor mi kell megtaláljuk a megoldás ötletét). Egy szerzői megoldásban azért sem lehet vakon megbízni (bár általában helyesek), mivel előfordulhat, hogy a szerző egy megoldási ötlet alapján készítette a feladatot és az más ötlettel esetleg sokkal könnyebben is megoldható (ez különösen a geometriai feladatoknál fordulhat elő), vagy pedig a szerző nem gondolt minden eshetőségre, és így nem teljes a megoldása.

Én nem vagyok híve a verseny előtti utolsó pillanatokban összehozott tételeknek, mert úgy a körülmények, mint a rendelkezésre álló idő csak felületes munkára adnak lehetőséget. Ilyen körülmények között különösen a NMMV esetén lehetetlen egy olyan minőségi feladatsort összeállítani, amely megfelel a résztvevő országok matematika tanterveinek, szaknyelvezetének és jelölési rendszerének is. Fontosnak tartanám, hogy a tételeket összeállítók időben megkapják a javasolt feladatokat, hogy azok többségét önállóan megoldhassák, és ennek alapján nyugodt körülmények között tudják megvitatni, hogy melyek alkalmasak a kitűzésre. Ha szegényes vagy egysíkú a javasolt feladatanyag, akkor legyen idejük, hogy kellő feladatokat szerkesszenek vagy keressenek.

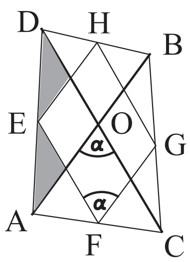
Tanulságosnak és érdekesnek találom a NMMV és más idegen országbeli versenyek feladatmegoldásainak tanulmányozását, mert a feladatok jellegén és színvonalán túl, megfigyelhetjük azt is, hogy az egyes országok tantervei mily módon befolyásolják az illető ország tanárainak (és ebből következően a tanulóinak is) a gondolkodását és mennyire tantervfüggő annak megítélése is, hogy egy feladat mennyire nehéz.

Példaként nézzünk meg két feladatot, amelyet a 24. NMMV-en (Szabadka – 2015) a XII. osztálynak tűztek ki (megtalálhatók a http://nmmv.berzsenyi.hu/feladatok/2015 címen).

**6. feladat.** *Egy $\overline{AB} = 42$ cm és egy $\overline{CD} = 58$ cm hosszú szakasz $\alpha$ szög alatt metszi egymást az $O$ pontban. Mekkora a szakaszok végpontjaival (mint csúcsokkal) alkotott $ACBD$ négyszög pontos területe, ha tudjuk, hogy tg $\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{7}$?*

*Gecse Frigyes* (Kisvárda, Magyarország)

A feladat sorszáma alapján arra következtetek, hogy a délvidéki kollégák ezt nehéz feladatnak minősítették, holott a mi tanterveink szerint ez egy könnyű feladat. (A feladat megfogalmazásán is lehetne vitatkozni.)




A hazai oktatásban a IX. osztály végén a háromszög területképleteinek alkalmazásaként levezetjük a konvex négyszög területképletét, így a feladat jelölései alapján $T = \dfrac{AB \cdot CD \cdot \sin\alpha}{2}$, ahol $\sin\alpha$ kiszámítása a $\sin\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}$ képlet alkalmazásával azonnali.

A „hivatalos” megoldás megszerkeszti a négyszög oldalainak $E, F, G, H$ felezőpontjait, majd területek egyenlőségével (a két satírozott háromszög összterülete az $AOD$ háromszög területének felével egyenlő) kimutatja, hogy a négyszög területe az $EFGH$ paralelogramma területének a kétszerese (lényegében a Varignon tételt bizonyítják). A paralelogramma oldalainak hossza a négyszög átlóinak a felével egyenlő (háromszögek középvonala), és a két oldal által bezárt szög mértéke $\alpha$, így $T = 2 \cdot T_{EFGH} = 2 \cdot EF \cdot FG \cdot \sin\alpha$ (a $\sin\alpha$ értékét a szerző is a fenti képlettel számította ki).

**3. feladat:** *Ha $\alpha$ hegyesszög, akkor bizonyítsd be, hogy teljesül az*

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 3+2\sqrt{2} \text{ } \textit{egyenlőtlenség}!$$

*Csikós Pajor Gizella* (Szabadka, Vajdaság)

A tétel összeállítói e feladat kiválasztásánál csak a szerző klasszikus módszerekkel (a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség és a $|\sin\alpha| \leq 1$ használatával) adott szép megoldását vették figyelembe, és nem gondoltak arra, hogy egyes XII.-es diákok ezt a feladatot derivált segítségével megoldható szélsőérték feladatnak is tekinthetik.

Aki matematikai analízissel oldotta a feladatot, az különösebb nehézség nélkül juthatott el az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő függvény deriváltjának $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)(1-\cos\alpha)}$ alakjához. Innen már azonnali, hogy az illető függvény $\dfrac{\pi}{4}$-ben veszi fel a minimumát, és e minimum értéke $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$.