Műhelysarok

TANÍTÁSI ÖTLETEK

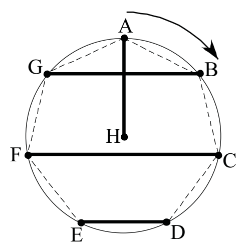
Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

Saját és másoktól ellesett apró ötleteket szeretnék bemutatni. Ezek az ötletek segíthetnek a matematika egyes feladatainak megoldásában, színesebbé tehetik az órákat, segíthetik a fogalmak, tételek, bizonyítások megértését.

A háromszögeknél kapott egyes összefüggések elforgatással (cirkuláris permutációval) történő átírását gyakran használjuk. Nézzük meg, hogy a kombinációk tanításánál ezt hogyan lehet hasznosítani. Például kérjük egy bajnokság mérkőzéseinek megtervezését, ha tudjuk, hogy a bajnokságban $2n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ csapat vesz részt, minden fordulóban minden csapatnak van ellenfele, és a verseny során minden csapat mindegyikkel pontosan egy mérkőzést játszik.

Ennek felírásában egy $2n-1$ oldalú szabályos sokszög segít, amelyben a csapatokat a sokszög csúcsai és a sokszög köré írt kör középpontja jelöli. Egy fordulóban azok a csapatok játszanak egymással, amelyek a sokszög egy oldalán és a vele párhuzamos átlókon, illetve a kiválasztott oldallal szemközti csúcsba húzott sugáron helyezkednek el.

A többi fordulót e szakaszrendszer ismételt elforgatásával kapjuk meg.



Például az A, B, C, D, E, F, G, H-val jelölt 8 csapat mérkőzéseinek a fordulói: A-H, B-G, C-F, D-E, majd eggyel elforgatva B-H, C-A, D-G, E-F, újabb forgatás után C-H, D-B, E-A, F-G, és így tovább, az utolsó forduló G-H, A-F, B-E, C-D.

Számlálási (valószínűségszámítási) feladatoknál gyakori, hogy előbb nem a kért halmaz elemeit számoljuk meg, hanem a komplementer halmaz elemeit (erre is szoktatni kell a tanulókat).

Például, ha meg kell számoljuk, hogy hány olyan természetes szám van 1 és 2015 között, amelyben szerepel a 4-es számjegy, akkor célszerűbb, ha előbb megszámoljuk, hogy 0 és 1999 között hány olyan szám van, amelyben nem szerepel a 4-es számjegy. Ennek érdekében az egy-, két- és háromjegyű számok elé annyi nullát írunk, hogy négyjegyű számnak tekinthessük (például $0 = 0000$, $3 = 0003$, $25 = 0025$), és keressük, hogy hány olyan $\overline{abcd}$ alakú szám van, amelyben $a \in \{0, 1\}$ és $b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ezekből összesen $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 1458$ darab van, tehát 1 és 1999 között $2000 - 1458 = 542$ olyan szám található, amelyben szerepel a 4-es számjegy. Ezekhez még hozzájön az 1999 és 2015 között található 2004 és 2014 is. Tehát 1 és 2015 között $542 + 2 = 544$ olyan szám van, amelyben szerepel a 4-es számjegy.

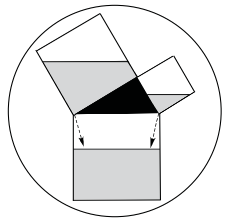
A tanulók a képletek felírásában gyakran úgy hibáznak, hogy az a hiba dimenziópróbával (a mértékegységekkel való műveletek elvégzésével) könnyen elkerülhető lenne. Ezért időben hozzá kell szoktassuk őket a mértékegységekkel való teszteléshez. Ha azt tapasztaljuk, hogy ezt figyelmen kívül hagyva durván hibáznak, akkor bemutathatunk egy olyan szofizmát, mint például „1 cm = 1 m" ($1\text{ cm} = 0,01\text{ m} = (0,1\text{ m})^2 = (10\text{ cm})^2 = 1\text{ m}$), hogy ráébresszük arra, hogy csalással bármit bizonyíthatunk. Azonban vigyázzunk arra, hogy hamis dolgokról csak kivételes alkalmakkor beszéljünk, ugyanis a pedagógia csak a pozitív példák használatát javallja.

Ajánlatos a tanulókat arra is rászoktatni, hogy az összefüggésekben számolják meg, hogy hány változó mennyiség szerepel, és abból a feladatban hány adott. Ha csak egy változó ismeretlen, akkor az kiszámítható az illető összefüggésből, ha pedig több, akkor még plusz relációkat kell keresni, vagy a feladat sajátosságait kell kiaknázni, vagy valamely ismeretlent paraméterként kell kezelni.

A fogalmak intuitív bevezetése segíthet az értelmezések megértésében. Például *A függvény folytonossága egy pontban* című leckénél szívesen használtam egy hídon átvezető országút példáját (egy folyóra épített hídnál a közlekedés csak akkor nem szakad meg, ha a folyó bal és jobb partjára épített országutak ugyanarra a helyre érkeznek, mint ahova a hidat építették; a bal oldali országutat a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ értéke, a jobb oldali országutat a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ értéke és a folyón átvezető híd szerepét az $f(x_0)$ játssza, és a függvény folytonos az x_0 pontban, ha $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$).

A helyzetvektorokkal való összefüggések levezetése során el szoktam mondani, hogy a helyzetvektorok ugyanazt a szerepet töltik be a matematikában mint a mindennapi életben azok a személyek, akik egy bizonyos helyről figyelik meg a környezetükben történő eseményeket. Ezt teszik nemcsak az ablakból állandóan kukucskálók, de több sportág játékvezetői is. Ez utóbbiak mindig úgy helyezkednek, hogy minden lényeges akciót nyomon tudjanak követni. A sporthoz hasonlóan a matematikában is fontos, hogy célszerűen válasszuk meg a helyzetvektorok kezdőpontját.

Egyes tételek intuitív bizonyítása sokaknak segít a megértésben (a kísérleti bizonyítások nem helyettesítik a matematikai bizonyítást, de segítenek azok lényegének megértésében). A szemléltetésben felhasználhatjuk a gyári, illetve házi készítésű készleteket, számítógépes animációkat, de akár a helyszínen is improvizálhatunk (például papírt vágunk vagy hajtogatunk).



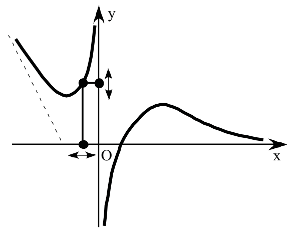
Ötletesnek és meggyőzőnek találtam a Pitagorasz-tétel víz átfolyatással történő bizonyítására szolgáló prezentációt (Pitagorasz-tétel másképpen: http://trollfesz.cc/fun/81805). Itt egy olyan eszközt használnak, amely egy körlapra erősített derékszögű háromszögből és az oldalaira szerelt négyzetekből áll. Az átlátszó anyagból készített négyzetek lényegileg kis vastagságú négyzet alapú téglatest víztartályok, és a háromszög hegyesszögeinél a víz át tud folyni egyik tartályból a másikba. A készülékbe annyi víz van beletöltve, amennyivel a befogókra helyezett két kisebb tartály teljesen megtelik. Az eszközt a körlap középpontja körül elforgatva, a két kisebb tartályból átfolyó víz az átfogóra helyezett nagy tartályt színültig tölti, és ezáltal képileg jeleníti meg, hogy a befogó oldalhosszú négyzetek területeinek összege az átfogó oldalhosszú négyzet területével egyenlő.

Napjainkban a számítógépes rajzprogramok is kitűnően felhasználhatók bizonyos leckék tanításánál. Például a vektorok tanításánál (ismétlésénél), szívesen használtam a Canvas programot. Ha egy rajzprogrammal felrajzolunk egy vektort és megduplázzuk (hogy legyen mihez hasonlítani), akkor az egyik vektort, az egérrel középen megfogva, bárhová elhúzhatjuk úgy, hogy változatlan marad a vektor iránya, irányítása és nagysága. A vektorok skalárral való szorzását a vektor kellő szám-szoros iránytartó nyújtásával (zsugorításával), illetve negatív számmal való szorzás esetén még az irányítás megváltoztatásával lehet nagyon könnyen, gyorsan és meggyőzően szemléltetni. Rajzprogrammal a vektorok összeadása és kivonása szintén jól szemléltethető, hisz könnyen odavihetjük a vektorokat, ahova óhajtjuk, és a paralelogramma, illetve sokszög szabállyal kapott eredményeket könnyen össze is hasonlíthatjuk.

A trapéz, paralelogramma, téglalap, rombusz, négyzet értelmezése és a közöttük levő kapcsolatok szemléltetése számítógépes rajzprogram használatával szintén meggyőző tud lenni.

A függvény határértékének tanításánál a tanulók egy része nehezen érti és képzeli el, hogy az Ox tengelyen végrehajtott mozgásnak a függvénytől függően az Oy tengelyen történő mozgás felel meg. Nos ezt a mozgást konkrétan is lehet szemléltetni minden olyan geometriai szerkesztő program felhasználásával, amely megőrzi a szerkesztett vonalak tulajdonságait. Én például az Euklides programmal (de lehet GeoGebrával is) szerkesztettem a koordináta-rendszerben egy olyan „tangörbét”, amelynek függőleges, vízszintes és ferde aszimptotája, minimuma és maximuma van.

Az Ox tengelyen egy pont húzásával együtt elmozdulnak a megfeleltetést megjelenítő (a tengelyekkel párhuzamos) egyenesek, és így nyomon követhető az Oy tengelyen a függvényértékek változása. A határértékeken kívül ezen a rajzon szemléltethető a függvény monotonitása, a szélső értékek, a függvény előjele, a függvényértékek halmaza, stb.



A számítógépek elterjedése előtt mindezt egy falitáblán szemléltettem. E táblán kialakított vájat vonala ábrázolta a függvény grafikus képét az adott koordináta-rendszerben. A grafikus kép egy pontjának megfelelő koordinátákat a vájatban mozgatható csuszkára erősített (automatikusan függőleges-vízszintesre beálló) drótkereszt segítségével lehetett meghatározni (a drótkereszt beállását a függőleges szárra erősített nehezék biztosította).

Jó lenne, ha a Matlap oldalain többen is megosztanák tanítási ötleteiket, a tanítás során szerzett tapasztalataikat, vagy bemutatnák valamely feladatcsoportra talált elegáns megoldásukat.

Szakirodalom:

[1]. *Ambrus András*: Bevezetés a matematikadidaktikába, ELTE, Eötvös Kiadó, 1995.
[2]. *Róka Sándor*: 77 logi-sztori, Tóth, Debrecen, 2001.