Műhelysarok

TÖBBFÉLEKÉPPEN MEGOLDHATÓ FELADATOK

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

Matematikaórákon, csoportos foglalkozásokon és tehetséggondozáson gyakran használunk többféleképpen megoldható feladatokat. Hálásak ezek a feladatok, mert több lehetőség is kínálkozik az elindulásra és így beleláthatunk a tanulók gondolkodásába is. Sokszor ilyen feladatoknál derül ki, hogy ki mennyire ötletes, és kinek van a megszokottól eltérő gondolkodása. Az ilyen feladatok oldásánál jó ha lehetőséget teremtünk arra is, hogy a többféle megoldást közösen elemezzük, és a megoldásokat esetleg szépség (ötletesség) szerint sorrendbe is állítsuk.

A geometria nagyon sok ilyen többféleképpen megoldható feladatot kínál. Erről már írtam a *Gondolatok egy feladattal kapcsolatban* (Matlap 2007/3, 90-94. oldal) és a *Varietas delectat* (Matlap 2012/5, 162-164. oldal) cikkeimben, így most más területekről vett feladatokkal szemléltetek.

1. Egy magyarországi iskola 6. osztályos felvételijén többek közt a következő feladatot tűzték ki: *Egy szabályos hatszög egyik csúcsát pirosra, a többit kék színűre színezzük. A hatszög csúcsaiból hármat kiválasztva háromszögeket kapunk. Melyik fajta háromszögből van több: amelyiknek van piros csúcsa, vagy amelyiknek nincs*? ([1]., 9.oldal).

1.a) Ehhez a feladathoz lényegileg mindenki hozzá tudott fogni, és a többség konkrétan megszámolta, hogy mindkét fajta háromszögből 10-10 darab van (középiskolás szinten $C_5^2 = C_5^3$).

1.b) Azok akik szigorúan csak a feladat kérdésére próbáltak válaszolni, párba állítással próbálkoztak. Így a tehetségesebb diákok észrevették, hogy ha veszik a piros csúcsot és még két kéket, akkor mindig 3 kék csúcs marad, amellyel pontosan egy háromszög rajzolható, vagyis minden piros csúcsot tartalmazó háromszögnek megfelel egy és csakis egy kék csúcsú háromszög és fordítva, minden kék csúcsú háromszög esetén egyetlen piros csúcsot is tartalmazó háromszög feleltethető meg. Tehát azonos számú háromszög van mindkét fajtából.

2. Az elkövetkezőkben nézzük az $\left[\dfrac{x+1}{2}\right] + \left[\dfrac{x+2}{4}\right] + \left[\dfrac{x+4}{8}\right] = 2$ egyenlet megoldását (Matlap 2012/5, A:2781. feladat).

2.a) Először nézzük a szokványos megoldást. Az egyenlet bal oldalán álló mindhárom tagra alkalmazzuk a $[x] \leq x < [x] + 1$ egyenlőtlenséget, a megfelelő oldalak összeadásával és az egyenlet felhasználásával eljutunk a $16 \leq 7x + 12 < 40$ egyenlőtlenségrendszerhez, és ezáltal az értelmezési halmazt leszűkítettük az $x \in \left[\dfrac{4}{7}, 4\right)$ intervallumra. Ezt követően e leszűkített értelmezési tartományon vizsgáljuk, hogy mely részintervallumokon teljesül az egyenlőség.

Ha $x \in \left[\dfrac{4}{7}, 1\right)$, akkor $\dfrac{x+1}{2} \in \left[\dfrac{11}{14}, 1\right)$, $\dfrac{x+2}{4} \in \left[\dfrac{9}{14}, \dfrac{3}{4}\right)$, $\dfrac{x+4}{8} \in \left[\dfrac{4}{7}, \dfrac{5}{8}\right)$ és így

$\left[\dfrac{x+1}{2}\right]+\left[\dfrac{x+2}{4}\right]+\left[\dfrac{x+4}{8}\right]=0+0+0=0\neq 2$, tehát $x\in\left[\dfrac{4}{7},1\right)$ nem megoldás.

Hasonló módon igazoljuk, hogy $x\in[1,2)$ nem megoldás, ekkor $1+0+0=1\neq 2$ jön ki.

$x\in[2,3)$ megoldás, mert ekkor $\dfrac{x+1}{2}\in\left[\dfrac{3}{2},2\right)$, $\dfrac{x+2}{4}\in\left[1,\dfrac{5}{4}\right)$, $\dfrac{x+4}{8}\in\left[\dfrac{6}{8},\dfrac{7}{8}\right)$, és így az $1+1+0=2$ egyenlőség igaz.

Hasonló módon bizonyítjuk, hogy $x\in[3,4)$ nem megoldás, mert ekkor $2+1+0=3\neq 2$. Tehát az egyenlet megoldáshalmaza $x\in[2,3)$.

2.b) Teljesen másként dolgozhatunk, ha a feladatot úgy értelmezzük, hogy olyan valós számokat keresünk, amelyek felhasználásával alkotott három egész szám összege 2-vel egyenlő.

Észrevesszük, hogy $x\leq 0$ nem lehet megoldás, mert ekkor $\dfrac{x+1}{2}\leq\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x+2}{4}\leq\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x+4}{8}\leq\dfrac{1}{2}$, és $\left[\dfrac{x+1}{2}\right]+\left[\dfrac{x+2}{4}\right]+\left[\dfrac{x+4}{8}\right]\leq 0\neq 2$, így a leszűkített $(0,\infty)$ halmazon dolgozunk tovább.

Ha $x>0$, akkor $\dfrac{x+1}{2}>\dfrac{x+2}{4}>\dfrac{x+4}{8}$, tehát $\left[\dfrac{x+1}{2}\right]\geq\left[\dfrac{x+2}{4}\right]\geq\left[\dfrac{x+4}{8}\right]\geq 0$, és így az egyenletben három csökkenő sorrendben felírt természetes szám összege kell 2 legyen.

Tehát csak a $2+0+0$ és az $1+1+0$ eseteket kell vizsgáljuk.

Az első esetben, ha $\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=2$, $\left[\dfrac{x+2}{4}\right]=0$ és $\left[\dfrac{x+4}{8}\right]=0$, akkor

$$\begin{cases} 3\leq x<5\\ -2\leq x<2\\ -4\leq x<4\end{cases}\iff\begin{cases} x\in[3,5)\\ x\in[-2,2)\\ x\in[-4,4)\end{cases}$$

E halmazoknak nincs közös eleme, tehát ez az eset nem valósulhat meg (ez sejthető is volt, mert az első két tag közt nincs olyan nagy különbség, hogy az egész részük 2 egységgel különbözzön).

Ha $\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=1$, $\left[\dfrac{x+2}{4}\right]=1$ és $\left[\dfrac{x+4}{8}\right]=0$, akkor

$$\begin{cases} 1\leq x<3\\ 2\leq x<6\\ -4\leq x<4\end{cases}\iff\begin{cases} x\in[1,3)\\ x\in[2,6)\\ x\in[-4,4)\end{cases}.$$

E halmazok közös része $x\in[2,3)$, és ez az egyenlet megoldása.

2.c) Az egyenletnek harmadik, teljesen más jellegű, megoldási módját a Matlap 2013/6, 222-223. oldalán olvashatjuk. Itt a megoldás abból az észrevételből indul ki, hogy az egyenlet mindegyik tagjában egy valós szám és $\dfrac{1}{2}$ összegének egészrészét vesszük. Az egyenlet mindhárom tagjára a Hermite-féle azonosságból kapható $\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=[2x]-[x]$ egyenlőséget alkalmazva a könnyebben oldható $[x]=\left[\dfrac{x}{8}\right]+2$ egyenlethez jutunk. Az $\left[\dfrac{x}{8}\right]=k\in\mathbb{Z}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $[x]=k+2$, innen $k+2\leq x<k+3$, vagyis $\dfrac{k+2}{8}\leq\dfrac{x}{8}<\dfrac{k+3}{8}$.

Az $\left[\dfrac{x}{8}\right]=k$ azt jelenti, hogy $k\leq\dfrac{x}{8}<k+1$, vagyis $-k-1<-\dfrac{x}{8}\leq -k$. Összeadva a $\pm\dfrac{x}{8}$-ra kapott két egyenlőtlenségrendszert a $-7k-6<0<-7k+3$ rendszerhez jutunk, ahonnan $k\in\left(-\dfrac{6}{7},\dfrac{3}{7}\right)$. Mivel $k\in\mathbb{Z}$, ezért $k=0$, így $[x]=2$, tehát $x\in[2,3)$.

Versenyeken a többféleképpen megoldható feladatoknál általában a diákok többsége szerez valamennyi pontot, az egyetlen ötlet segítségével megoldható nehezebb feladatokat csak a kiemelkedő tehetségek tudják esetleg megoldani, a többi ezekhez hozzá sem tud kezdeni. Egy erős mezőnyben ilyen feladatok kitűzése is indokolt. Példaként bemutatok egy ilyen egyetlen ötlettel megoldható feladatot is, amelyet az 1994-es Kalmár László versenyen a 7. osztályosoknak tűztek ki.

3. *Adott tíz pozitív egész szám. Igaz-e, hogy közülük kiválasztható néhány (esetleg egy, esetleg az összes) szám úgy, hogy a kiválasztott számok összege osztható legyen* 10*-zel?*

([1]., 26. oldal)

Megoldás: Legyen a tíz szám a_1, a_2, $\ldots$, a_{10}, és képezzük az $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $s_{10} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ összegeket. Ha ezen összegek közül valamelyik osztható 10-zel, akkor már igazoltuk, hogy létezik olyan összeg, amely 10-zel osztható.

Ha egyik összeg sem osztható 10-zel, akkor az egyes összegek 10-el való osztási maradéka 1, 2, 3, $\ldots$, 9 lehet, és mivel tíz összegben 9 féle maradék lehet, ezért a skatulya-elv alapján valamelyik maradék legalább kétszer szerepel. Legyen s_j és s_k (($j < k$) két azonos maradékú összeg. Ekkor az $s_k - s_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_k$ összeg osztható lesz 10-zel. (Volt olyan versenyző, aki ezt a feladatot is megoldotta.)

Szakirodalom

[1]. *Orosz Gyula, Majoros Mária*: Tehetséggondozás matematikából általános iskolások számára, Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft, Debrecen.