GYAKORLATI FELADATOK A MATEMATIKAÓRÁN*

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

Napjaink egyik követelménye, hogy matematikaórákon minél több gyakorlati feladatot oldassunk a tanulókkal. Ez azért vált időszerűvé, mert az elmúlt évek során a hangsúly inkább az elméleti tartalomra esett, és háttérbe szorultak az alkalmazások és az interdiszciplináris kapcsolatok. E hiányosságokra a PISA felmérések eredményei hívták fel a figyelmet, ezeken tanulóink a nemzetközi átlag alatt teljesítettek. Ugyancsak a PISA felmérések kongatták meg a vészharangot, hogy baj van a tanulóink szövegértésével is.

Az Európa Uniós Eurydice szervezet egy 2010/11-es jelentéséből tudjuk, hogy:

„Az elmúlt években, és különösen 2007 óta, az európai országok többsége felülvizsgálta a matematika tanterveit, elfogadva egy olyan tanulási eredmény alapú megközelítést, amelyben a hangsúly a fejlődő diákok kompetenciáira és készségeire helyeződik és nem az elméleti tartalomra. A tantervekben a matematikára vonatkozó tartalom csökkent, míg a tantárgyközi kapcsolatokra, problémamegoldásra és az ismeretek alkalmazására vonatkozó tartalom nőtt." ([2].)

Sajnos az itt említett tanterv felülvizsgálat nálunk még nem történt meg. Hazánk még mindig abban az illúzióban él, hogy a nemzetközi tantárgyversenyeken elért eredmények fényében a romániai oktatás igenis hatékony (néhány diák kitűnő teljesítménye nem vetíthető vissza az egész rendszerre, ez csak az illető diákok képességeit és az őket felkészítő oktatók hozzáértését tükrözi).

A 2013 decemberi sürgősségi kormányrendelet is csak annyit közölt, hogy az érettségi vizsgát és a líceumi felvételit 2019-től a PISA-felmérések mintájára alakítják át, de hogy miként fognak változni a tantervek az egyelőre még titok.

Pedig fontos lenne a tantervek előzetes ismerete, mert a tartalmi előírásokon túl az is kiderülne, hogy az eljövendőben mennyire lesz „levegős" a tananyag, vagyis mennyi idő jut majd gyakorlati feladatok megoldására és általában begyakorlásra, feladatmegoldásra. A PISA jellegű gyakorlati feladatokra a tanárok is fel kell készüljenek, esetleg szükséges lesz a szervezett továbbképzésükre is. A mostani matematikatanárok a tanulmányaik során egyáltalán nem voltak elkényeztetve a matematika gyakorlati alkalmazásaival, s a gyakorlati problémákra sem mindenki egyformán fogékony. Az egyetemeken a kettős szakképzés rég megszűnt (1965-ben végeztek az utolsó matematika-fizika szakos tanárok, tehát már mind nyugdíjasok). Fontos lenne, hogy az egyetemek alaposabb szakmai és módszertani felkészítést biztosítanának azoknak, akik tanárnak készülnek!

A témához kapcsolódik Martin Wagenschein következő észrevétele: „*Az életből, vagy az egyes tudományok területéről vett példák csak annyiban segítik a matematika megszerettetését, amennyiben azokat le tudjuk egyszerűsíteni a kellő szintre. De ezzel lényegileg el is szakadunk bizonyos fokig a gyakorlattól és az illető tudománytól, amelyből a példát vettük*" ([3].)

Ez az oka, hogy olykor a minőségi gyakorlati feladatok helyett erőltetett, mesterkélt, mondvacsinált feladatok megoldására is kényszerülünk.

Érdeklődési körömből adódóan (szeretek barkácsolni, érdekel a fizika, a technikatörténet, fogékony vagyok a művészetekre, irodalomra), tantervtől függetlenül, az óráimon én mindvégig szerettem gyakorlati feladatokat oldatni, és ott ahol lehetőségem adódott, szívesen teremtettem kapcsolatot más tudományokkal, irodalommal, művészettel. Erre a Matlapban a Műhelysarok rovatom több cikkében is utalok, de jelent meg olyan írásom is, mint *Trükkös mérések* (Matlap 2006/1), vagy *Gyakorlati eljárások matematikai háttere* (Matlap 2006/2).

*Elhangzott a Magyar Tudomány Napja Erdélyben rendezvénysorozat keretében 2014. november 15-én.

Itt szeretném azt is megjegyezni, hogy írásaimban és előadásaimban azért vállalkozom tanítási tapasztalataim, ötleteim, meglátásaim bemutatására, hogy hátha azokból valaki valamit esetleg hasznosítani tud. Ezeket az ötleteket kritikusan kell fogadni, és csak azokat az elemeket célszerű az egyéni eszköztárba beépíteni, amelyek összhangban vannak az egyéni adottságokkal, elképzelésekkel, munkastílussal, s amelyek megfelelnek a konkrét munkahelyi körülményeknek is. A didaktikában nincsenek általános érvényű „receptek". Ezt Bürger (bécsi matematikadidaktikus) úgy fogalmazta meg: „*Aki azt állítja, hogy a matematikát így és így kell tanítani, az sarlatán*!" ([1].)

A fent elmondott általános megjegyzések után lássunk néhány egyenlettel megoldható szöveges feladatot, amelyeket a jelenlegi tanterveknek megfelelően a középiskolai osztályokban lehet hasznosítani (itt nem foglalkozom kamatszámítási, statisztikai, valószínűségszámítási, kombinatorikai feladatokkal, illetve a derivált és a határozott integrál gyakorlati alkalmazásaival, mert ilyen feladatok a tankönyvben is szerepelnek, és ezek megoldására a tanterv is kötelez).

1. Elsőfokú egyenlet megoldásához vezető feladat

Egy turista az A és B közötti 9 km hosszú utat oda és vissza 3 óra 41 perc alatt teszi meg. Az úton vannak emelkedők, lejtők és vízszintes útszakaszok. A turista az emelkedőn 4 km/óra, a vízszintesen 5 km/óra, a lejtőn 6 km/óra sebességgel halad. Milyen hosszú a vízszintes szakasz?

Megoldás: Ha a vízszintes szakasz x km, $x \in (0, 9)$, akkor $\frac{2x}{5} + \frac{9-x}{4} + \frac{9-x}{6} = 3 + \frac{41}{60}$, ahonnan $x = 4$ km.

2. Másodfokú egyenlet megoldásához vezető feladat

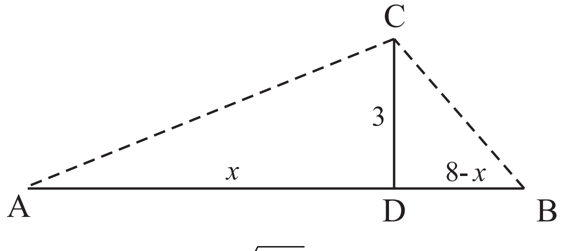
Egy vállalat 31 tonna árú elszállítására gépkocsikat igényelt, amelyekkel egy fordulóban tudná a szállítást elvégeztetni oly módon, hogy minden kocsira egyenlő súlyú terhet raknak. Az igényelt gépkocsik számánál eggyel kevesebb számú gépkocsit küldtek, ezért minden gépkocsira a tervezetthez képest 1550 kg-mal több terhet kellett felrakjanak, hogy a szállítást így is egy fordulóban tudják végrehajtani. Hány kocsit igényelt a vállalat?

Megoldás: Ha a vállalat x kocsit igényelt, $x \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, akkor $\frac{31}{x-1} - \frac{31}{x} = 1,55$ egyenletet kapjuk, amely egyenértékű az $x^2 - x - 20 = 0$ egyenlettel, amelynek csak az $x = 5$ megoldása felel meg a feladat feltételeinek.

3. Irracionális egyenlet megoldásához vezető feladat

Egy egyenes országút mellett, egymástól 8 km távolságra található A és B település, C pedig ettől az úttól beljebb eső falu, amely légvonalban az A településtől kétszer olyan távol fekszik, mint a B-től. A C-be vezető 3 km hosszú bekötőút, a főútra merőleges és A és B között tér le az országútról. Az A településtől milyen távol kell letérjünk a C felé vezető bekötőútra?

Megoldás: Legyen D a bekötőút talppontja, keressük az $AD = x$ értékét. Figyelembe véve, hogy $AC = 2BC$, a Pitagorasz-tétel felhasználásával írhatjuk $\sqrt{x^2 + 9} = 2\sqrt{(8-x)^2 + 9}$.



Négyzetre emelés és rendezés után a $3x^2 - 64x + 283 = 0$ egyenlethez jutunk, amelynek a gyökei $x_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{175}}{3}$, és mivel $x \in (0, 8)$, ezért csak az $x = \frac{32 - \sqrt{175}}{3} \approx 6,257$ felel meg.

Tehát az útleágazás A-tól $6,257$ km-re található.

Megjegyzések:

a) Az $x = \dfrac{32+\sqrt{175}}{3} \approx 15,076$ megoldásnak is van mértani értelme, de ekkor a letérő már nem a két település között található.

b) A feladat módosítható úgy is, hogy kivesszük az $AC = 2BC$ feltételt, és úgy kérjük az AD meghatározását, hogy például $AD + 1 = BC$ legyen. Ekkor az $x + 1 = \sqrt{(8-x)^2+9}$ egyenletet kell megoldjuk, amelynek $x = 4$ a megoldása.

4. Exponenciális egyenlet megoldásához vezető feladat

Egy fénymásológép 3300 *lejbe kerül. A használat során a gép mindenkori értéke egy év alatt* 20%*-kal csökken. Amikor a gép értéke* 700 *lejnél kevesebb lesz, egy nagyobb hiba esetén már gazdaságtalan azt megjavíttatni. Hány év múlva mondhatjuk el, hogy ha a fénymásoló elromlik, akkor célszerű kicserélni*?

Megoldás: A feltétel szerint a gép értéke x év múlva $3300\left(1-\dfrac{20}{100}\right)^x$.

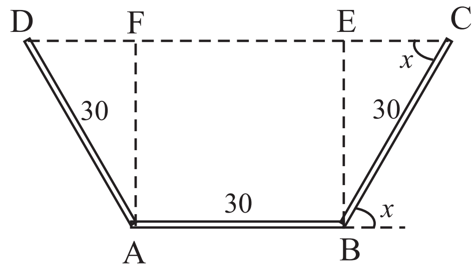
Keressük azt az x -et, amelyre $3300(0,8)^x = 700$, ahonnan $(0,8)^x = \dfrac{7}{33}$. Vesszük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát, és így $x = \dfrac{\lg 7 - \lg 33}{\lg 0,8}$, amelynek közelítő értéke $x \approx 6,95$.

Tehát ha a gép kb. $6,95$ év múlva meghibásodik, akkor célszerű lesz egy új gép vásárlása.

5. Trigonometrikus egyenlet megoldásához vezető feladat

Három darab 2 *m hosszú egy colos deszkából olyan itatóvályút készítünk, amelynek keresztmetszete egy egyenlőszárú trapéz, amelynek szárai és kisalapja a vályú belsejében* 30-30-30 *cm* (*ezért a két oldallap* 30 *cm széles és az alap az összeerősítés miatt* 35 *cm széles deszka, a vályú végeinek lezárásához szükséges deszka rendelkezésünkre áll*). *Hogy tudjuk megépíteni úgy a vályút, hogy benne* 200 *liter víz férjen el*?

Megoldás: Ismeretlennek választhatjuk a trapéz magasságát, a trapéz nagyalapjának hosszát, vagy a trapéz szárának a kisalappal bezárt szögét. Ha a feladatot trigonometriailag akarjuk megoldani, akkor a szöget választjuk ismeretlennek (a másik két ismeretlennel irracionális egyenletet kapunk.)



A trapéz nagyalapja $CD = 0,3(1+2\cos x)$, kisalapja $AB = 0,3$ m, magassága $BE = 0,3 \cdot \sin x$, a vályú belső hossza $h = 2$ m, akkor a belső térfogat $V = \dfrac{(CD+AB)\cdot BE}{2} \cdot h$, tehát meg kell oldjuk a $(0,3)^2 \cdot 2(1+\cos x)\cdot \sin x = 0,2$ egyenletet, amely $(1+\cos x)\cdot \sin x = \dfrac{10}{9}$ alakban is írható, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Mivel ennek az egyenletnek a megoldásánál nehézségekbe ütközünk, ezért számítógéppel oldjuk meg, és két megoldást is kapunk. Az egyik $x = 1,45144$ radián, ami megközelítőleg $x = 83,16°$.

Az asztalosok szögmérőt nem szívesen használnak, ezért az oldallapok pontos beállításához jó ha megadjuk, hogy $BE = 29,78$ cm és ellenőrzésre pedig $CD = 37,15$ cm. A másik szintén elfogadható megoldás: $x = 0,673352$ radián, ami közelítőleg $38,58°$ és ekkor $BE = 18,71$ cm, $CD = 76,9$ cm lesz.

Megjegyzés: Ez a feladat analízis órán is hasznosítható, amennyiben a fenti adatokkal adott maximális űrtartalmú vályú elkészítését kérjük (a maximális űrtartalom $233,8$ liter, amely $x = 60°$ esetén valósul meg).

További példák bemutatása helyett e pár példában rejlő tanulságot emelném ki. E feladatok megkövetelik, hogy mi válasszuk meg az ismeretlent és mi kell tisztázzuk, hogy az ismeretlennek milyen értékeit várjuk. Az adott mennyiségek és az ismeretlen között meg kell találjuk a megfelelő összefüggéseket és közben figyelnünk kell a mértékegységek „homogenizálására” is. A kapott egyenlet megoldása után ki kell válasszuk a feladat feltételeinek megfelelő megoldást. Ha az eredmény nem egész szám, akkor szükséges a közelítő érték kiszámolása, amely olykor számológép vagy számítógép használatot igényel. Ha olyan egyenlethez jutunk, amelyet nem tudunk megoldani, akkor be kell mutassuk, hogy számítógéppel miként kereshetjük meg az egyenlet gyökeit.

Ezek a feladatok azért hasznosak, mert gyakorlati dolgokra hívják fel a figyelmet, gondolkodásra serkentenek és a frissen tanult ismeretek mellett egy sor régebb, vagy más tantárgynál tanult ismeretet is mozgósítanak.

Szakirodalom

[1]. *Ambrus András*: A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban; rmpsz.ro/uploaded/tiny/files/magiszter/2003/osz/9.pdf

[2]. http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132HU_HI.pdf

[3]. *Pogány János SP*: Miért nehéz a matematika?, SzePi. 1998.