LÍCEUMI TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK[§]

IX. osztály

L: 3162. Legyenek $a, b > 0$ valós számok úgy, hogy $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \in [a, b]$, bármely $x, y \in [a, b]$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy $ab = 2$.

Bencze Mihály tanár, Brassó

L: 3163. Legyen $M = \{x^2 - 7y^2 \ \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.
a) Mutassuk meg, hogy $2018^n \in M$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.
b) Igaz-e, hogy $1969 \in M$? Indokoljuk meg az állítást!

Jakab Tibor tanár, Sepsiszentgyörgy

L: 3164. Adott az ABC háromszög. A BC átmérőjű körön legyen M egy B és C pontoktól különböző tetszőleges pont, és legyenek D, K, L a BC, BM, CM szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy az $AK^2 + AL^2 - AM^2$ összeg állandó.

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

L: 3165$^{\Delta}$. Egy n napig tartó sportversenyen összesen x darab érmet osztottak ki. Az első napon kiosztottak 1 érmet és a megmaradó érmek $\dfrac{1}{7}$ részét, a második napon 2 érmet és még a megmaradó érmek $\dfrac{1}{7}$ részét, és így tovább. Végül az n-edik, azaz utolsó napon kiosztották a még megmaradt, pontosan n érmet. Hány napig tartott a verseny, és hány érmet osztottak ki összesen?

***

X. osztály

L: 3166. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{x^3 + x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2\sqrt{2}}{7}.$$

Longáver Lajos tanár, Nagybánya

L: 3167. a) Ha az x, y, z szigorúan pozitív valós számokra és az a, b, c valós számokra fennáll a $\dfrac{\lg x}{b - c} = \dfrac{\lg y}{c - a} = \dfrac{\lg z}{a - b}$ összefüggés, akkor $xyz = 1$ és $x^a \cdot y^b \cdot z^c = 1$.

b) Legyenek $a, b, c \in (1, +\infty)$ egy háromszög oldalhosszai. Igazoljuk, hogy a háromszög egyenlő oldalú, ha $\sqrt{3 + \log_a b} + \sqrt{3 + \log_b c} + \sqrt{3 + \log_c a} = 6$.

***

[§]A IX. osztályos tanulók a VII-IX. osztályok, a X. osztályos tanulók a VIII-X. osztályok, a XI-XII. osztályos tanulók a IX-XII. osztályok számára kitűzött feladatokra a megoldásokat **2020. június 10-15.** között küldhetik a `matlap2007@yahoo.com` címre. A $^{\Delta}$-gel jelzett feladatokra minden líceumi tanuló küldhet megoldásokat, osztályától függetlenül. Kérjük az összesítőlapon a tanár nevét feltüntetni!

L: 3168. Jelölje r az ABC háromszögbe írt kör sugarát. Húzzunk párhuzamost a BC oldallal úgy, hogy az érintse a beírt kört, és legyenek E és F pontok az érintő metszéspontjai az AB, illetve AC oldallal. Ezt megismételve az AC és AB oldalakra, kapjuk a G, H, M és N metszéspontokat rendre a BC, AB, illetve AC és BC oldalakkal. Legyen az AEF háromszög beírt körének sugara r_1, a BGH háromszögé r_2 és a CMN háromszögé r_3. Igazoljuk, hogy $r = r_1 + r_2 + r_3$.

Györgypál Gergő és *Györgypál Tamás*
tanulók, Nagyszalonta

L: 3169$^{\Delta}$. 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról a témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármelyik kettő azonos témáról levelez egymással.

***

XI. osztály

L: 3170. Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixok úgy, hogy $\det(AB - BA) > 0$. Mutassuk ki:

$$4\det(I_2 + 2021BA - 2020AB) \geq \det(2I_2 + AB + BA).$$

***

L: 3171. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$18^x + 21^x = 14^x + 63^x.$$

Kovács Béla tanár, Szatmárnémeti

L: 3172. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\sin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x + b\sin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x$ függvény. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény nem periodikus, ha $a, b \in \mathbb{R}^*$.

Bencze Mihály tanár, Brassó

L: 3173$^{\Delta}$. Egy $n \times n$ négyzetes mátrixot, amelynek elemei a $P = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ halmazból valók, *sajátos mátrix*nak hívjuk, ha bármely $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén az i-edik sor és az i-edik oszlop együtt tartalmazza P valamennyi elemét.

a) Létezik-e sajátos mátrix ha $n = 2020$? Hát $n = 2021$ esetén?

b) Bizonyítsuk be, hogy sok olyan n van, amelyre létezik sajátos mátrix.

***

XII. osztály

L: 3174. a) Legyen $G_p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} \mid z^{p^n} = 1\}$, ahol $p \geq 2$. Igazoljuk, hogy G_p részcsoportja a $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportnak.

b) Legyen H egy végtelen részcsoportja a $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportnak. Igazoljuk, hogy H-nak bármely részcsoportja akkor és csak akkor véges, ha létezik p prímszám, amelyre $H = G_p$.

***

L: 3175. Legyen $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, \mathrm{d}x$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Igazoljuk, hogy $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x \leq 1$, bármely $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén, majd számítsuk ki $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n n^2 I_n$ értékét.

***

L: 3176. Legyen $F_1 \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = x(\ln x - 1)$ bármely $x > 0$ esetén és értelmezzük az $(F_n)_{n \geq 1}$, $F_n \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénysort úgy, hogy F_{n+1} függvény F_n egy primitívje és $\lim\limits_{x \to 0} F_{n+1}(x) = 0$, bármely $n \geq 1$ esetén.

Számítsuk ki $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n! F_n(1)}{\ln n}$ értékét.

***

L: 3177$^{\Delta}$. Anna, Bálint és Cecília a következő játékot játssza: három kártyára egy-egy egész szám van írva, m, n és p úgy, hogy $0 < m < n < p$. A kártyákat összekeverik, majd szétosztják úgy, hogy mindegyik játékos kapjon egyet. Ezután a játékosok annyi golyót kapnak, amennyit a kártyájuk mutat, majd a kártyákat összeszedik, a kapott golyók azonban a játékosoknál maradnak. Ezt a játékot legalább kétszer játsszák végig, és az utolsó játszma esetén Annának 20, Bálintnak 10, Cecíliának pedig 9 golyója van. Bálint tudja, hogy ő az utolsó alkalommal p darab golyót kapott. Ki kapott először n darab golyót?

***