ELEMI OSZTÁLYOS TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK*

E: 186. Adottak a 48, 8 és 2 számok, ebben a sorrendben. A számok közé a kivonás és/vagy az osztás műveleti jeleket téve és kerek zárójelet használva, hányféleképpen végezhetők el a műveletek az adott számokkal, és milyen eredményt kapunk az egyes esetekben?

***

E: 187. Ha 3 toll ára ugyanannyi, mint 5 golyóstoll ára, és egy könyv annyiba kerül, mint egy toll és egy golyóstoll, akkor hány könyvet vásárolhatunk egy toll és 9 golyóstoll árából?

***

E: 188. Egy iskolát felújítottak a nyár folyamán: 13 tanteremben cserélték ki a padokat és a székeket. Minden tanterembe 14 kétszemélyes padot és mindegyikhez két új széket vásároltak, valamint egy széket a tanári asztalhoz. Hány új padot és hány új széket vásárolt az iskola?

***

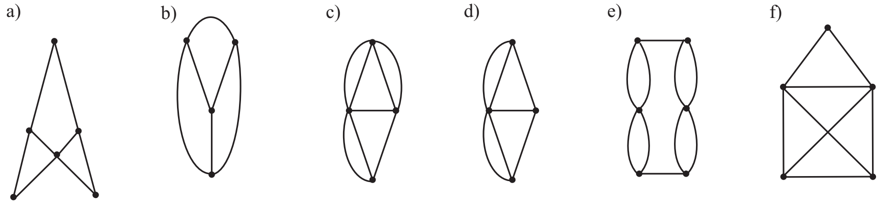
E: 189. Egy 12 cm élű, fából készült kocka két szemközti lapja nincs befestve, a többi négy lapja pedig zöldre van festve. A kockát felvágjuk 2 cm élű kiskockákra. Az így kapott kockák közül hánynak lesz:

a) két zöld lapja,
b) egy zöld lapja,
c) minden lapja natúr színű?

***

*Ezekre a feladatokra minden I-V. osztályos tanuló küldhet megoldásokat, amelyeket **2020. november 20-ig fogadunk el** a `matlapmegoldasok@yahoo.com` címre. **A feladatok megoldásához az elemi osztályokban tanult módszereket alkalmazzuk!** Kérjük az összesítőlapon a tanító nevét feltüntetni!

E: 190. Melyik ábra rajzolható meg úgy, hogy nem emeljük fel a ceruzát és egyik vonaldarabon sem haladunk át kétszer?



***

ÁLTALÁNOS ISKOLÁS TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK[**]

V. osztály

A: 4246. Egy parkolóban emberek és ötszemélyes, illetve négyszemélyes autók vannak, az emberek és autók száma 21. Az emberek az ötszemélyes autókban ülnek, minden autó tele van, a négyszemélyes autókban pedig nem ül senki. Hányféleképpen valósítható meg? Mennyi az autók minimális, illetve maximális száma?

***

A: 4247. Tibor kirándulást szervezett, ahova meghívta öt barátját, és azt mondta nekik, hogy mindegyikük hívhat négy barátot, akik közül mindegyik hívhat három barátot, akik közül mindegyik hívhat két barátot, akik közül mindegyik hívhat egy barátot. Hány barátját hívta meg Tibor a kirándulásra, és legtöbb hányan mentek kirándulni?

***

A: 4248. Sára most 12 éves. Amikor annyi idős lesz, mint most az édesanyja, akkor az édesanyja 58 éves lesz. Hány éves volt Sára édesanyja?

***

A: 4249. Az Óperenciás-tenger Sárkány-szigetén öt-, hat- és hétfejű sárkányok laknak. A hatfejűek hazugok, a többiek igazmondók. Négy sárkány találkozott a parton. Izzószem szerint négyüknek összesen 25, Tűznyelv szerint 22, Füstölgő szerint 21, Parázsló szerint pedig 24 fejük van. Hogy hívják az igazmondó sárkányt?

***

A: 4250. Négy számkártyán négy betű áll: $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{É}}$ $\boxed{\text{K}}$ $\boxed{\text{T}}$. Ezeket az összes lehetséges módon sorba rakjuk, és az így kapott négybetűs „szavakat" ábécé sorrendbe helyezzük. Hányadik a sorban a TÉKA szó?

***

[**]Minden V-VIII. osztályos tanuló küldhet megoldásokat, osztálya és az *azt megelőző osztályok* számára kitűzött feladatokra. A IX. osztályos tanulók a VII-VIII., a X. osztályos tanulók pedig a VIII. osztály számára kitűzött feladatok megoldásait küldhetik be. **Megoldásokat 2020. november 20-ig fogadunk el** a `matlapmegoldasok@yahoo.com` címre. Kérjük az összesítőlapon a tanár nevét feltüntetni!

VI. osztály

A: 4251. Határozzuk meg az a és b számjegyeket, amelyekre az $\overline{abba}$ alakú természetes szám köbszám.

Csáki Ferenc tanár, Sárköz

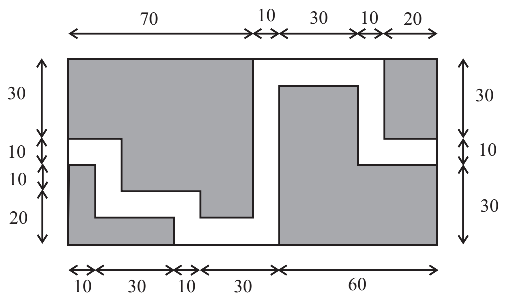
A: 4252. Egy számsorozat első tagja 15, a következő tagjait pedig úgy kapjuk meg, hogy az előző tag számjegyeinek köbét összeadjuk. Melyik szám lesz a sorozat 2020. tagja? Melyik szám lesz a sorozat 2020. tagja, ha az első tag 13?

***

A: 4253. Egy torony magassága 10 m és 20 m között van, a tetejére lépcsősor vezet fel. Ha a lépcsőket kettesével számoljuk, akkor 1 marad, ha hármasával számoljuk, akkor 2 marad, ha négyesével számoljuk, akkor 3 marad, de ha hetesével számoljuk, akkor nem marad semmi. Hány lépcső visz fel a torony tetejére, ha egy lépcsőfok magassága 16 cm?

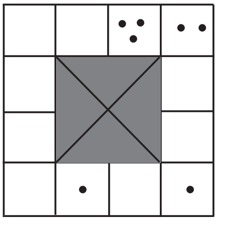
***

A: 4254. Az ábrán egy park alaprajza látható. A szürke rész a zöldövezet, a fehér rész a parkban levő sétányokat jelöli. Mennyi a sétányok területe összesen? (A hosszúságok méterben vannak megadva.)



***

A: 4255. Az ábrán egy 12 négyzetből álló tábla látható, amelyre hét korongot helyeztünk. A továbbiakban ráteszünk egy-egy korongot két, egymás melletti négyzetre. Ezt többször megismételve megpróbáljuk elérni, a lehető legkevesebb korongot felhasználva, hogy mindegyik négyzetben ugyanannyi korong legyen. Megvalósítható ez? Ha igen, hogyan? Ha nem, miért?



***

VII. osztály

A: 4256. Egy egész számokból alkotott számsorozat első tagja a, második tagja b, harmadik tagja a második és az első különbsége, negyedik tagja a harmadik és a második különbsége, és így tovább.

a) Mennyi a sorozat 2020. tagja?

b) Szerkesszünk egy ilyen sorozatot, amelyben a 2020. tag -2020 és b egy negatív páros szám. Számítsuk ki a sorozat első hat tagját.

***

A: 4257. a) Egyszerűsítsük a $T = \dfrac{36^n + 12 \cdot 6^n + 32}{5 \cdot 6^n + 40}$ törtet, ahol $n \in \mathbb{N}$. Milyen szám T?

b) Oldjuk meg az $x + 5xy = -7$ egyenletet, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$.

***

A: 4258. a) Határozzuk meg az $n \in \mathbb{Z}$ számot, ha az $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid 2 < |z| < n + 2\}$ halmaznak 22 eleme van.

b) Igazoljuk, hogy bármely n természetes szám esetén $b = [(-1)^{3n+1}(6n + 9) + 1] : (-4)$ egész szám.

***

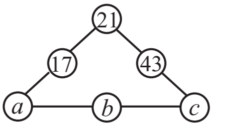
A: 4259. Az ABC háromszög AD oldalfelezője ($D \in BC$) merőleges a BF szögfelezőre ($F \in AC$), és $\widehat{ADC} = 120°$.

a) Számítsuk ki az ABC háromszög szögeinek mértékét.

b) Igazoljuk, hogy $CF = 2AF$.

***

A: 4260. Az a, b és c betűk helyére írjunk nullától különböző természetes számokat úgy, hogy a három egyenes mentén a számok összege ugyanannyi legyen. Hány ilyen (a, b, c) számhármas létezik? Mennyi a legkisebb, illetve a legnagyobb összeg?



***

VIII. osztály

A: 4261. a) Határozzuk meg az x és y számokat, ha tudjuk, hogy fordítottan arányosak a 2 és 5 számokkal és harmonikus középarányosuk 2020.

b) Tudva azt, hogy $\overline{ab} = \sqrt{\overline{abb}} + \sqrt{b}$, határozzuk meg az $\overline{ab}$ természetes számokat.

Csáki Ferenc tanár, Sárköz

A: 4262. a) Határozzuk meg az $A = (\sqrt{20}, \sqrt{21}) \cap \left\{\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{24}{5}, 5\right\}$ halmazt.

b) Igaz-e a következő állítás: Ha egy négyjegyű szám két-két számjegye egyenlő, akkor a szám osztható vagy 11-gyel, vagy 101-gyel.

***

A: 4263. Ha az x és y prímszámokra és a z természetes számra fennáll a $3\sqrt{x}+5\sqrt{y} = z\sqrt{2}$ egyenlőség, akkor számítsuk ki $x + 3y - z$ értékét.

***

A: 4264. Vegyünk fel az MN szakaszon egy tetszőleges P pontot, és az MN egyenes ugyanazon oldalán az A és B pontokat úgy, hogy az AMP és BPN háromszögek egyenlő oldalúak legyenek. Legyen $AN \cap BM = \{S\}$ és $AM \cap BN = \{C\}$. Igazoljuk, hogy:

a) $\widehat{BSN} = 60°$;

b) az SP félegyenes az $\widehat{MSN}$ szögfelezője.

Simon József tanár, Csíkszereda

A: 4265. Egy 19×19-es négyzetrács négyzeteibe a $+1$ vagy -1 számot írjuk be, tetszőlegesen. Minden sor végére és minden oszlop alá odaírjuk a sorban, illetve az oszlopban szereplő számok szorzatát. Az így kapott számokat összeadjuk. Lehet-e a kapott összeg nulla? Ha igen, milyen esetekben, ha nem, akkor miért?

***

LÍCEUMI TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK[§]

IX. osztály

L: 3194. a) Határozzuk meg az $n \in \mathbb{N}$ azon értékeit, amelyekre $\sqrt{n^2 + 6n + 28} \in \mathbb{N}$.

b) Határozzuk meg az a és b prímszámokat, amelyekre $a^5 - b^3 = (a+b)^2 + 54$.

***

L: 3195. a) Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan természetes szám létezik, amelyik 2020-szal kezdődik és osztható 2021-gyel.

b) Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan természetes szám létezik, amelyik 2021-gyel kezdődik és osztható 2020-szal.

Bencze Mihály tanár, Brassó

L: 3196. Egy EAB derékszögű háromszögben az AB átfogóra kifelé megszerkesztjük az $ABCD$ téglalapot. Számítsuk ki a téglalap területét, ha tudjuk, hogy $EA = 4$ cm, $EB = 3$ cm és $EC = 2BC$.

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

L: 3197$^{\Delta}$. Egy négysoros táblázat első sorában a pozitív egész számok szerepelnek 1-től 2020-ig. A következő sorokban minden helyen a felette levő szám számjegyeinek összege szerepel. Hány 1-es található a negyedik sorban?

***

X. osztály

L: 3198. a) Határozzuk meg az $n \in \mathbb{N}$ számokat, amelyekre $A = \sqrt{5 + \sqrt{n}} + \sqrt{5 - \sqrt{n}}$ természetes szám.

b) Határozzuk meg az a és b természetes számokat, amelyekre $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{a}}{\sqrt{3} + \sqrt{b}}$ racionális szám.

***

L: 3199. Határozzuk meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $xf(y) - yf(x) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, bármely $x \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}$ esetén.

***

L: 3200. Ha a és b pozitív valós számok, akkor igazoljuk, hogy

a) $\dfrac{2a+1}{(a^2+b+1)(b+2)} + \dfrac{2b+1}{(b^2+a+1)(a+2)} \le \dfrac{2}{a+b+1}$,

b) $\dfrac{2a^2+2ab+4b+1}{(a^2+b+1)(b+2)} + \dfrac{2b^2+2ab+4a+1}{(b^2+a+1)(a+2)} \le 2$.

Bencze Mihály tanár, Brassó

[§]A IX. osztályos tanulók a VII-IX. osztályok, a X. osztályos tanulók a VIII-X. osztályok, a XI-XII. osztályos tanulók a IX-XII. osztályok számára kitűzött feladatokra küldhetnek megoldásokat, **2020. november 20-ig** a `matlapmegoldasok@yahoo.com` címre. A $^{\Delta}$-gel jelzett feladatokra minden líceumi tanuló küldhet megoldásokat, osztályától függetlenül. Kérjük az összesítőlapon a tanár nevét feltüntetni!

L: 3201$^\Delta$. Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amelyben a számjegyek nem feltétlenül szigorúan monoton növekvőek?

Schefler Barna egyetemi hallgató, Budapest

XI. osztály

L: 3202. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix.
a) Határozzuk meg a $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $AB = BA$.
b) Határozzuk meg az $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^4 = A$.

***

L: 3203. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $AB \neq BA$ és $A^2B^2 = B^2A^2$. Bizonyítsuk be, hogy létezik $\alpha \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $A^2 = \alpha I_2$, vagy létezik $\beta \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $B^2 = \beta I_2$.

***

L: 3204. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokat értelmezzük az alábbi módon:
$a_{n+1} = (1-\alpha)a_n + \alpha b_n$, $b_{n+1} = \beta a_n + (1-\beta)b_n$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $\alpha, \beta \in (0,1)$ és $a_0 < b_0$.
Tanulmányozzuk a sorozatok korlátosságát, monotonitását és konvergenciáját.

***

L: 3205$^\Delta$. Egy konvex n-szögnek semelyik három átlója nem metszi egymást egy pontban. Hány metszéspontjuk van az átlóknak? Hány részre esik szét a sokszöglap, ha elvágjuk az átlók mentén?

Schefler Barna egyetemi hallgató, Budapest

XII. osztály

L: 3206. Tekintsük az $A = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, x \in (-1,1) \right\}$

halmazt. Bizonyítsuk be, hogy A a mátrixok szorzásával Abel-csoportot képez.

***

L: 3207. Határozzuk meg az $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyeknek $F\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a primitív függvényük és $F(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{2}$, bármely $x \in (0,+\infty)$, $f(1) = 2$ esetén.

***

L: 3208. Számítsuk ki:

$$\text{a)} \int x^2 \text{arcsin} x \mathrm{d}x; \qquad \text{b)} \int \frac{x^5}{x^8+1} \mathrm{d}x.$$

***

L: 3209$^\Delta$. Egy kerekasztal körül négy férfi és négy nő ül. Bizonyítsuk be, hogy van négy szomszédos ember, akik között ugyanannyi a nő, mint a férfi.

***