ELEMI OSZTÁLYOS FELADATOK MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

A Matlapban az elemi osztályos tanulók részére kitűzött feladatok megoldását elemi és ötödik osztályos tanulóktól fogadjuk el. A beküldött megoldások sokszor meghaladják az elemi osztályos szintet, az alkalmazott módszerekkel – bár kétségtelen, hogy elvezetnek a keresett eredményhez – elbonyolódik a feladat. Gyakran feleslegesen alkalmazott módszer a feladatok algebrai megoldása: az egy vagy több ismeretlen bevezetése, és a feladat egyenlettel, illetve egyenletrendszerrel történő megoldása. Ezek a feladatok általában az *ábrázolás módszerét* alkalmazva könnyen megoldhatók, legtöbb egy ismeretlen, de többnyire egyetlen ismeretlen bevezetésére sincs szükség.

Az alábbiakban ismertetünk néhány módszert az elemi osztályos feladatok megoldására, illetve válogattunk a Matlapban a 2018–2019-es tanév folyamán kitűzött feladatokból, melyeknek bemutatjuk a megoldását, néhány észrevétellel kiegészítve. A módszereket természetesen nagyobb osztályos tanulók számára kitűzött feladatok megoldásánál is gyakran alkalmazzuk.

A fordított út módszerével olyan feladatokat tudunk könnyűszerrel megoldani, amelyek esetén valamilyen ismeretlen mennyiségből kiindulva, az adatok és relációk egymást követő sorrendben vannak megadva, és rendszerint egy információ éppen az előtte levő információhoz kapcsolódik. Ilyen esetben legtöbbször éppen az utolsó – általában megadott – adatból indulunk ki, és úgymond visszafele okoskodunk (innen ered a rákmódszer elnevezés), és mindig az adott műveletekkel ellentétes műveletet végezve, lépésről lépésre, megkapjuk a kiinduló ismeretlent.

Ezt a módszert nagyon gyakran alkalmazhatjuk, akár logikai típusú feladatok esetén is. Az alábbiakban bemutatunk egy példát.

Egy páncélszekrény ajtaját kell kinyitni, amelyen a mellékelt ábrán látható, 25 gombból álló zárószerkezet van. Ez csak akkor nyílik, ha a megfelelő sorrendben, minden gombot pontosan egyszer nyomunk meg. Mindegyik gomb a következő lépés számát és irányát jelzi (B= balra, J=jobbra, L= le, F= fel), a számoláskor az „indulási" gombot nem kell beleszámolni. Utoljára a középső, • jelű gombot kell megnyomni. Melyik gombot kell először megnyomni?

3J	4L	2B	2B	2L
3J	3J	3L	2B	2L
1J	1L	•	3B	2B
2F	1B	3F	1F	2B
4J	1B	1J	1F	4F

Megoldás: A fordított út módszerét alkalmazzuk. A 25 gomb közül legyen a 25. a legutolsó gomb, a 24. az, amelyiknek az utasítása a 25-öshöz vezet, a 23. az, amelyiknek az utasítása a 24-eshez vezet. Az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg eljutunk az 1-es számhoz. Ez azt jelzi, hogy ezt a gombot kell legelőször megnyomni, utána a 2-est, ..., végül a 25-öst. Tehát legelőször a 2. sor 3. oszlopában elhelyezkedő 3L utasítású gombot kell megnyomni (lásd a mellékelt ábrát).

3J 17	4L 19	2B 16	2B 18	2L 23
3J 10	3J 12	3L 1	2B 11	2L 13
1J 6	1L 7	• 25	3B 5	2B 24
2F 9	1B 8	3F 15	1F 4	2B 14
4J 21	1B 20	1J 2	1F 3	4F 22

Vannak olyan feladatok, amelyeket a fordított út módszerével szemléletesebben megoldhatunk, ha szemléltetjük is az egyes lépéseket, mint például a következő feladat esetén:

Gondoltam egy számot, megszoroztam 5*-tel, utána hozzáadtam* 42*-t, ezt elosztottam* 7*-tel, amit kaptam abból kivontam* 11*-et, és így az eredmény* 200*. Melyik számra gondoltam?*

Algebrai megoldás

Legyen x a gondolt szám. Sorra felírjuk az egyes műveleteket, vagyis modellezzük a feladatot:

$5x$

$5x + 42$

$(5x + 42) : 7$

$(5x + 42) : 7 - 11 = 200 \quad / + 11$ (1)

$(5x + 42) : 7 = 211 \quad / \cdot 7$ (2)

$5x + 42 = 1477 \ / \ -42$ (3)

$5x = 1435 \ /: \ 5$ (4)

$x = 287$

Aritmetikai megoldás

A jobb megértésért kövessük a bal oldalon bemutatott algebrai megoldás lépéseit. Észrevehető, hogy az egyenlet megoldásakor végzett (1)–(4) formális műveletek egyeznek az aritmetikai megoldás (1)–(4) lépéseivel.

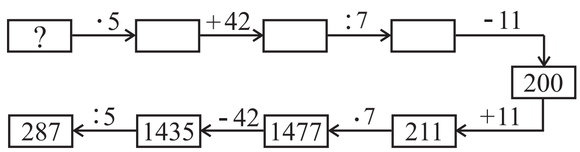
(1) Mielőtt kivontam volna 11-et, a szám $200 + 11 = 211$ volt.

(2) Mielőtt elosztottam volna 7-tel, a szám $211 \cdot 7 = 1477$ volt.

(3) Mielőtt hozzáadtam volna 42-t, a szám $1477 - 42 = 1435$ volt.

(4) Mielőtt megszoroztam volna 5-tel, a szám $1435 : 5 = 287$ volt.

Az aritmetikai megoldást így sematizálhatjuk:



Tehát a gondolt szám a 287.

Egy igen érdekes feladat típus az, amelyeket az úgynevezett *logikai táblázattal vagy logikai négyzettel* oldhatunk meg könnyűszerrel. Az ilyen feladatok esetén úgymond társításokat (relációkat) kell megtalálnunk két halmaz elemei között. Éppen ezért, egy olyan táblázatot készítünk, amelynek a bal szélén oszloposan feltüntetjük az egyik halmaz elemeit, majd a felső sorban feltüntetjük a második halmaz elemeit. A megoldás abból áll, hogy keressük meg, hogy az első halmaz adott elemei a második halmaz mely elemeivel vannak relációban. Ezt a táblázatban úgy foghatjuk fel, hogy ha két elem egymással relációban van, akkor a két elem találkozásánál levő kis téglalapba „+" jelet teszünk, ha biztosan nincsenek relációban, akkor „−" jelet teszünk.

Taktikai szempontból igen fontos a következő: ha két elem találkozásánál levő kis téglalapba már egy „+" jelet tettünk, megerősítve ezzel a két elem közti relációt, akkor a két elem sorában, illetve oszlopában levő minden kis téglalapba már „−" jelet teszünk, hiszen egy elem csak egy elemmel van relációban. Amennyiben egy sorban vagy egy oszlopban egy kivétellel mindegyik kis téglalapban a „−" jel szerepel, akkor a kimaradt téglalapba biztosan „+" kell. Nagyon sok esetben tanácsos a kis téglalapokba a kitöltés sorrendjét jelölő számot is beírni, így könnyebben követhető a feladat megoldásának a gondolatmenete. A leírtak szemléltetésére nézzük a következő feladatot:

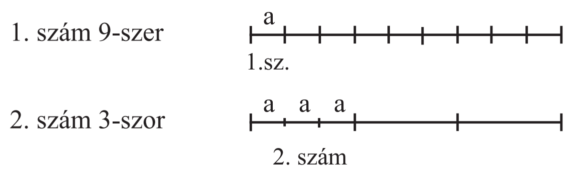
Négy ember vezetékneve Kanász, Halász, Vadász és Madarász. A foglalkozásuk valamilyen sorrendben kanász, halász, vadász és madarász. Még tudjuk, hogy a Kanász nem halász, a Madarász nem kanász és nem halász, valamint egyikük foglalkozása sem egyezik a vezetéknevükkel. Kinek mi a foglalkozása?

Megoldás: Készítsünk egy olyan táblázatot, amelynek a bal felére oszloposan beírjuk a négy ember foglalkozását, a táblázat fölötti sorba pedig beírjuk a négy lehetséges foglalkozást. Ezután kezdhetünk úgy, hogy egyik ember neve sem egyezik meg a foglalkozásával, ezért írtuk a táblázatba átlósan a „−" jeleket és az (1.) számot. Ezután azzal folytattuk, hogy Kanász nem halász, így került be a „−" (2.), aztán a „−" (3.), stb. számok. Természetesen a táblázat kitöltésének nemcsak egy sorrendje van, de nekünk elegendő, ha egy lehetséges kitöltési sorrendet megadunk. Ha egy sorban négy darab „$-$” lesz, akkor az ötödik kistéglalapba mindenképpen „$+$” kerül. A táblázatból könnyűszerrel kiolvashatjuk a válaszokat!

1. (2018/7.sz. 258.o. E: 93.) *Két szám összege* 148*. Ha az első számot megszorozzuk* 9*-cel, a másodikat pedig* 3*-mal, a kapott szorzatok egyenlőek. Melyik ez a két szám*?

***

Megoldás



Legyen az 1. szám a, ekkor a 2. szám $3a$. Tudva, hogy összegük 148, következik, hogy $a = 148 : 4$, tehát $a = 37$. Az 1. szám 37, a 2. szám $3 \cdot 37 = 111$.

Ellenőrzés: $37 + 111 = 148$; $9 \cdot 37 = 3 \cdot 111$, vagyis $333 = 333$ igaz.

2. (2018/8.sz. 302.o. E: 97.) *Bea egy kétjegyű számra gondolt. Felcserélte a számjegyeit, majd a kapott számhoz hozzáadott* 15*-öt. Vette az összegnek a felét, és az így kapott számnak felcserélte a számjegyeit. Melyik számra gondolt Bea, ha végül* 73*-at kapott eredményül*?

***

Megoldás: A feladatot a fordított út módszerével oldjuk meg:

eredmény: $\boxed{73}$ $\rightarrow$ felcseréljük a számjegyeket: $\boxed{37}$ $\rightarrow$ a szám kétszerese: $37 \cdot 2 = \boxed{74}$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ kivonunk 15-öt: $74 - 15 = \boxed{59}$ $\rightarrow$ felcseréljük a számjegyeket: $\boxed{95}$

Tehát Bea a 95 számra gondolt.

3. (2018/9.sz. 338.o. E: 101.) a) *Öt egymásutáni természetes szám összege* 55*. Melyek ezek a számok*?

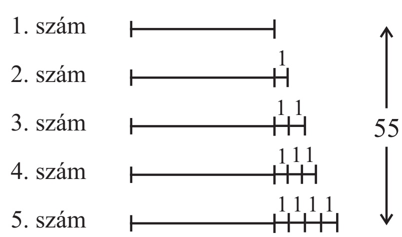
b) *Keressünk egy módszert, amellyel könnyen kiszámíthatjuk az*

$$S = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{10\text{ db}} \text{ összeget.}$$

***

Megoldás

a)



A legkisebb szám $[55 - (1 + 2 + 3 + 4)] : 5 = 45 : 5 = 9$, az öt szám $9, 10, 11, 12, 13$.

b)

$$\begin{array}{rcr}
9 & = & 10 - 1 \\
99 & = & 100 - 1 \\
999 & = & 1000 - 1 \\
\vdots & & \vdots \\
\underbrace{99\ldots9}_{10\text{ db}} & = & 1\underbrace{0\ldots0}_{10\text{ db}}-1
\end{array}$$

Összeadjuk az egyenlőségek megfelelő oldalait, így
$S = (10 + 100 + 1000 + \ldots + 1\underbrace{0\ldots0}_{10\,\text{db}}) - 10 = \underbrace{11\ldots1}_{10\,\text{db}}0 - 10 = \underbrace{11\ldots1}_{9\,\text{db}}00.$

4. (2018/9.sz. 338.o. E: 103.) *Egy öttagú családban az életkorok összege jelenleg* 80 *év.*
a) *Mennyi volt életkoruk összege* 3 *évvel ezelőtt?*
b) *Hány év múlva lesz életkoruk összege* 110 *év?*
c) *Ha a szülők életkorának összege most* 4*-szer annyi, mint három gyermekük életkorának összege, és az apa* 6 *évvel idősebb az édesanyánál, akkor határozzuk meg, hogy hány évesek a szülők jelenleg?*

***

Megoldás

a) $80 - 3 \cdot 5 = 80 - 15 = 65$ év volt életkoruk összege.
b) $(110 - 80) : 5 = 30 : 5 = 6$ év múlva.

c) gyerekek életkorának összege:

szülők életkorának összege:

A gyerekek életkorának összege $80 : 5 = 16$ év, a szülők életkorának összege pedig $4 \cdot 16 = 64$ év. Az apa 6 évvel idősebb, mint az anya, így az anya életkora $(64 - 6) : 2 = 29$ év, és ezért az apa $29 + 6 = 35$ éves.

5. (2018/10.sz. 378.o. E: 109.) *Szavanna, Medárd, Zénó és Regina egy vadaspark négy lakója. Van köztük medve, róka, oroszlán és zsiráf. Az oroszlán neve Zénó vagy Regina, a róka nem Szavanna és nem Medárd. A medve és a róka neve nem négybetűs. A zsiráf neve Regina vagy Szavanna. Melyik állatnak mi a neve?*

***

Megoldás: A kitöltést célszerű azzal kezdeni, hogy a róka nem Szavanna, és nem Medárd. A medve és a róka nem Zénó, mivel ez az egyetlen négybetűs név. Ezek után a róka oszlopában csak a Regina sora marad üres, tehát ezt „+” jellel jelöljük. Utána a Regina sorába végig „–” jelet teszünk, és ez megkönnyíti az oroszlán nevének beírását, mert Regina nem lehet, továbbá a zsiráf sem lehet Regina, így a további kitöltések egyértelműek. Egy lehetséges kitöltési sorrendet a táblázatban mutatunk.

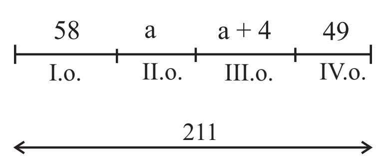
Név/állat	medve	róka	oroszlán	zsiráf
Szavanna	– (15.)	– (1.)	– (14.)	+ (9.)
Medárd	+ (16.)	– (2.)	– (13.)	– (10.)
Zénó	– (3.)	– (4.)	+ (12.)	– (11.)
Regina	– (6.)	+ (5.)	– (7.)	– (8.)

6. (2019/1.sz. 21.o. E: 112.) *Egy iskola* I.-IV. *osztályaiban összesen* 211 *tanuló tanul. A* III. *osztályt* 49 *tanuló már elvégezte, és* 58 *tanuló még nem jár* II. *osztályba. A* III. *osztályos tanulók száma* 4*-gyel több, mint a* II. *osztályban tanulóké. Hány tanuló van az egyes évfolyamokon?*

***

Megoldás

A feladat alapján IV. osztályba 49 tanuló, I. osztályba pedig 58 tanuló jár. Ha II. osztályban a tanuló tanul, akkor III. osztályban $a + 4$ a létszám. Ekkor $a = [211 - (58 + 4 + 49)] : 2 =$ $= (211 - 111) : 2 = 100 : 2 = 50.$

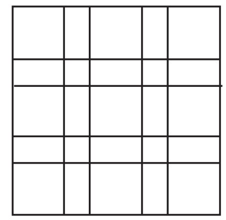


Tehát II. osztályba 50 tanuló, III. osztályba pedig 54 tanuló jár.

Megjegyzés: A feladat kérdése – Hány tanuló van az *egyes* évfolyamokon? – azt jelenti, hogy hány tanuló van az I, II, III, illetve a IV. osztályokban külön-külön. Néhányan arra a kérdésre válaszoltak, hogy hány tanuló van az *első* osztályban.

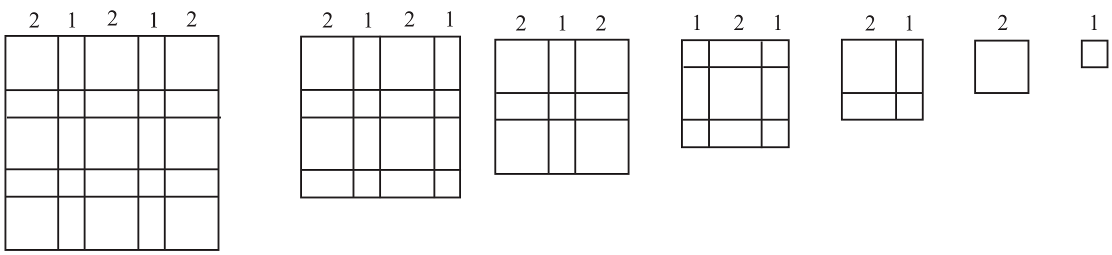
Ugyanígy a 2018/10. sz. E: 108. feladatban is.

7. (2019/2.sz. 59.o. E: 120.) *Egy 8 cm oldalhosszúságú négyzetet felosztottunk a csúcsaitól 2 cm és 3 cm távolságra levő, az oldalakkal párhuzamos szakaszokkal, amint az ábrán látható. Hány négyzet van az ábrán?*



***

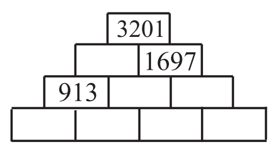
Megoldás: Megvizsgáljuk, hogy hány típusú négyzet van az ábrán, és összeszámoljuk, hogy melyikből hány darab van.



1 db 4 db 4 db 1 db 16 db 9 db 4 db

$1 + 4 + 4 + 1 + 16 + 9 + 4 = 39$ négyzet látható az ábrán.

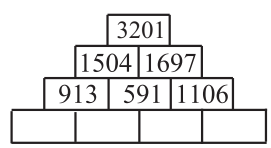
8. (2019/1.sz. 21.o. E: 114.) *Az ábrán látható számpiramisban két egymás melletti mezőben álló számok összege a felettük álló mezőben szerepel. Mennyi az alsó sorban álló számok összege?*



***

Megoldás

A felső három sorból hiányzó számok könnyen kiszámíthatók: $3201 - 1697 = 1504$, $1504 - 913 = 591$, $1697 - 591 = 1106$.



Az alsó sor első két mezőjében álló számok összege 913, a másik két mezőben álló számok összege 1106.
Így a négy szám összege $913 + 1106 = 2019$.

Megjegyzés: Az alsó sorban álló négy számot nem lehet egyértelműen meghatározni, de erre nincs is szükség.

9. (2019/3.sz. 99.o. E: 121.) *Négy természetes számot páronként összeadva az összegek 371, 859, 982, 1037, 1160, 1648. Mennyivel egyenlő a négy szám összege?*

***

1. *megoldás*

A legkisebb összeg a két legkisebb szám összege, a legnagyobb összeg a két legnagyob szám összege. Így ezt a két számot összeadva megkapjuk a négy szám összegét: $371 + 1648 = 2019$.

2. *megoldás*

Mindegyik szám három összegben szerepel, így az összes adott összeg összege a számok összegének háromszorosa.

Tehát $371+859+982+1037+1160+1648 = 6057$, és a négy szám összege $6057 : 3 = 2019$.

3. *megoldás*

Legyen a négy szám a, b, c, d. Ekkor $a + b = 371$, $a + c = 859$, $a + d = 982$, $b + c = 1037$, $b + d = 1160$, $c + d = 1648$.

Kiszámítjuk a, b, c, d értékét, majd összeadjuk a kapott számokat.

Megjegyzés: Az 1. megoldást csak néhány feladatmegoldó vette észre, a tanulók többsége a 2. megoldásban leírt módszerrel oldotta meg a feladatot. Néhányan a 3. megoldásban vázolt módszert alkalmazták, ami felesleges és nem felel meg az elemi és V. osztályok színvonalának.

10. (2019/4.sz. 142.o. E: 126.) *Adott a* 20192019 … 2019 *természetes szám, melyben a* 2019 *számot írjuk többször egymás mellé. Hány számjegyből áll a szám, ha tudjuk, hogy* 2019 *darab nullától különböző számjegye van*?

Pap-Czier Levente tanár, Nagykároly

Megoldás

A 2019 számban 3 darab nullától különböző számjegy van. Így az adott számban $2019 : 3 = 673$-szor szerepel a 2019 szám. Tehát a szám $673 \cdot 4 = 2692$ darab számjegyből áll.

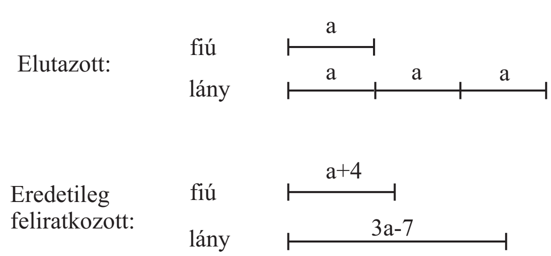
11. (2019/5.sz. 183.o. E: 133.) *A hétvégi kirándulásra eredetileg kétszer annyi lány iratkozott fel, mint fiú. Utolsó héten néhányan meggondolták magukat. Még* 7 *lány iratkozott fel, és* 4 *fiú lemondta a kirándulást. Így végül háromszor több lány volt a kiránduló csoportban, mint fiú. Hány gyerek ment kirándulni*?

***

Megoldás

Ábrát készítünk, ahol a az elutazott fiúk számát jelöli. Így az elutazott lányok száma $3a$, és eredetileg $a + 4$ fiú, illetve $3a - 7$ lány volt feliratkozva. Tudva, hogy kétszer annyi lány volt feliratkozva, mint fiú, írhatjuk, hogy $3a - 7 = a + 4 + a + 4 \Rightarrow 3a - 7 = 2a + 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 15$.

Tehát 15 fiú és $3 \cdot 15 = 45$ lány ment kirándulni.



Megjegyzés: Az ismeretlen jó megválasztása fontos a feladatoknál. Törekedjünk arra, hogy ne vezessünk be feleslegesen több ismeretlent.