L: 3618. *Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén léteznek a $2 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$, számok, amelyekre $\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)\cdot\ldots\cdot(x_n^2-1)+1} \in \mathbb{N}$.*

Jakab Tibor tanár, Sepsiszentgyörgy

Megoldás

Az állítást a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

Ellenőrzés:

I. $n = 1$ esetén a tetszőleges $x_1 \geq 2$ számmegfelelő, $n = 2$ esetén írhatjuk, hogy
$(x_1^2-1)(x_2^2-1)+1 = x_1^2x_2^2+1-x_1^2-x_2^2+1 = (x_1x_2-1)^2-(x_2-x_1)^2+1$.
Ha $2 \leq x_1$, tetszőleges és $x_2 = x_1+1$, akkor $(x_1^2-1)(x_2^2-1)+1 = (x_1x_2-1)^2-1+1 =$
$= (x_1x_2-1)^2$.

II. Feltételezzük, hogy az állítás igaz n-re és igazoljuk helyességét $(n+1)$-re.
Az indukciós feltevés alapján írható, hogy $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\cdot\ldots\cdot(x_n^2-1)+1 = y_n^2$.
Ekkor $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\cdot\ldots\cdot(x_n^2-1)(x_{n+1}^2-1) = (y_n^2-1)(x_{n+1}^2-1)+1 =$
$= y_n^2x_{n+1}^2+1-((x_{n+1}^2+y_n^2)+1 = (y_nx_{n+1}-1)^2-(x_{n+1}-y_n)^2+1$
Legyen $x_{n+1} = y_n+1$. Ekkor $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}^2-1) = (y_nx_{n+1}-1)^2$
Ugyanakkor $x_1^2-1 \geq 2^2-1 = 3 > 1, \ldots, x_{n+1}^2-1 \geq 2^2-1 = 3 > 1$, így
$x_{n+1} = y_n+1 = \sqrt{(x_1^2-1)\cdot\ldots\cdot(x_n^2-1)+1} > \sqrt{(x_n^2-1)+1} = x_n+1$, továbbá
$\sqrt{(x_1^2-1)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}^2-1)+1} = (y_nx_{n+1}+1) \in\ \mathbb{N}$ és $2\ \leq x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}$.

XII. osztály

L: 3622. *Ha p egy prímszám és a_1, a_2, a_3, a_4 nem mind nullával egyenlő egész számok, akkor igazoljuk, hogy*

$$D(a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ pa_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ pa_3 & pa_4 & a_1 & a_2 \\ pa_2 & pa_3 & pa_4 & a_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

***

Megoldás

Feltételezzük, hogy a,b,c,d relatív prímek, ellenkező esetben kiemeljük a determináns elé a legkisebb közös osztót.

Továbbá feltételezzük, hogy $D = 0$ és fejtsük ki a determinánst az első oszlop elemei szerint. Ekkor írhatjuk, hogy

$$0 = a_1\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ pa_4 & a_1 & a_2 \\ pa_3 & pa_4 & a_1 \end{vmatrix} - pa_4\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ pa_4 & a_1 & a_2 \\ pa_3 & pa_4 & a_1 \end{vmatrix} + pa_3\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ pa_3 & pa_4 & a_1 \end{vmatrix} - pa_2\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ pa_4 & a_1 & a_2 \end{vmatrix},$$ ahonnan következik, hogy p osztója az $a_1\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ pa_4 & a_1 & a_2 \\ pa_3 & pa_4 & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1^3+p^2a_4^2a_3+pa_2^2a_3-pa_1a_3^2-2pa_1a_2a_4)$ szorzatnak.

Innen következik, hogy $p \mid a_1$, azaz írhatjuk, hogy $a_1 = pb_1$. Ekkor $D(a_1,a_2,a_3,a_4) =$
$= D(pb_1,a_2,a_3,a_4) = pD(a_2,a_3,a_4,b_1) = 0$, tehát $D(a_2,a_3,a_4,b_1) = 0$.

Hasonlóan $p \mid a_2$, $p \mid a_3$ és $p \mid a_4$. Így ellentmondáshoz jutunk, mert a_1,a_2,a_3,a_4 relatív prímek.

Tehát $D(a_1,a_2,a_3,a_4) \neq 0$.

L: 3623. *Adott az* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ *mátrix és az* $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1 \\ x+my+2z \ = -1 \end{cases}$ *egyenletrendszer, ahol* $m \in \mathbb{R}$.

a) *Határozzuk meg* m *értékét, ha* $\det A = 0$.

b) *Igazoljuk, hogy bármely* $m \in \mathbb{R}$ *esetén az egyenletrendszer összeférhető.*

c) *Ha* (x_0, y_0, z_0) *az egyenletrendszer megoldása és* $z_0 = 2$*, számítsuk ki* m *értékét.*

***

Megoldás: Jakócs Tamás magiszteris hallgató, BBTE, Kolozsvár

a) Számítsuk a ki az A mátrix determinánsát:

$$\det A = (2+m^2+1) - (1+m+2m) = m^2 - 3m + 2.$$

Meghatározzuk a kapott másodfokú egyenlet gyökeit:

$$\Delta = 9 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2.$$

Tehát, ha $\det A = 0$ akkor $m \in \{1, 2\}$.

b) Ha $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, akkor $\det A \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 3$. Mivel az egyenletrendszerünk 3 ismeretlent és 3 egyenletet tartalmaz, így a bővített mátrix rangja is 3, tehát a rendszer összeférhető és határozott.

Ha $m = 1$, akkor $\det A = 0$, viszont létezik 2×2-es aldetrminánsa az A mátrixnak, melynek értéke nem nulla: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tehát rang$A = 2$. Könnyen belátható, hogy a bővített mátrix rangja is 2 (determinánsa 0), így a rendszer összeférhető és határozatlan.

Ha $m = 2$, akkor $\det A = 0$, viszont ebben az esetben is létezik 2x2-es aldetermináns, melynek értéke nem nulla: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, tehát rang $A = 2$. A bővített mátrix rangja itt is 2, így a rendszer összeférhető és határozatlan.

c) Ha (x_0, y_0, z_0) az egyenletrendszer megoldása és $z_0 = 2$, akkor az azt jelenti, hogy fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 2 = 0 & (1) \\ mx_0 + y_0 + 2 = m - 1 & (2) \\ x_0 + my_0 + 4 = -1. & (3) \end{cases}$$

Rendezve a (2) és (3) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\begin{cases} mx_0 - m = -y_0 - 2 - 1 & (2) \\ my_0 = -x_0 - 4 - 1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx_0 - m = -y_0 - 3 & (2) \\ my_0 = -x_0 - 5. & (3) \end{cases}$$

Összeadva ezen két egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$mx_0 + my_0 - m = -x_0 - y_0 - 3 - 5 \Leftrightarrow m(x_0 + y_0 - 1) = -(x_0 + y_0) - 8$$

Ekkor (1) alapján $x_0 + y_0 = -2$, így:

$$m(-2-1) = -(-2) - 8 \Leftrightarrow -3m = -6 \Rightarrow m = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Tehát ebben az esetben $m = 2$.

L: 3624. *Adott az* $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *függvény.*

a) *Igazoljuk, hogy* f *szigorúan csökkenő az* $[e,+\infty)$ *intervallumon.*

b) *Igazoljuk, hogy* $f(x) \ \leq \dfrac{1}{e}$*, bármely* $x>0$ *esetén.*

c) *Határozzuk meg* $x>0$ *értékét, ha* $f(x) + f\left(\dfrac{x^2}{e}\right) = \dfrac{2}{e}$*.*

***

Megoldás: Gál Tamara magiszteris hallgató, BBTE, Kolozsvár

a) Megvizsgáljuk a függvény deriváltját:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\ln' x \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow x = e.$$

Készítsünk előjeltáblázatot:

	0	e	∞
$f'(x)$	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	0	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$
$f(x)$	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$

Tehát az előjeltábla értelmében $f(x)$ szigorúan csökkenő az $x \in [e,\infty)$ intervallumon.
b) Mivel a függvény szigorúan csökkenő az (e,∞) intervallumon és szigorúan növekvő a $[0,e)$ intervallumon így az f függvény e-ben éri el a maximumát.

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x > 0.$$

c) Igazoljuk, hogy ha

$$x > 0, f(x) + f\left(\frac{x^2}{e}\right) = \frac{2}{e}.$$

$$x > 0, f(x) + f(\frac{x^2}{e}) = \frac{2}{e} \Longleftrightarrow \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \frac{x^2}{e}}{\frac{x^2}{e}} = \frac{2}{e}$$

Mivel $f(e) = \dfrac{1}{e}$ és függvény csak ebben az egy pontban éri el ezt az értéket, illetve $f\left(\dfrac{e^2}{e}\right) =$ $= f(e) = \dfrac{1}{e}$ és $\dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e} = \dfrac{2}{e}$. A függvény monotonitásából következik, hogy csak az $x = e$ pontban lehetséges ez. Tehát a megoldás $x = e$.

L: 3625. *Adott az* $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + m}{x^2}$ *függvény,* $m \in \mathbb{R}$.

a) *Határozzuk meg* m *értékét úgy, hogy a függvénynek az* $x = 2$ *pontban helyi szélsőértéke legyen.*

b) *Ha* $m = 4$, *ábrázoljuk grafikusan a függvényt.*

c) *Tárgyaljuk az* $x^3 - \alpha x^2 - 3x + 4 = 0$ *egyenlet valós gyökeinek számát az* α *valós paraméter függvényében.*

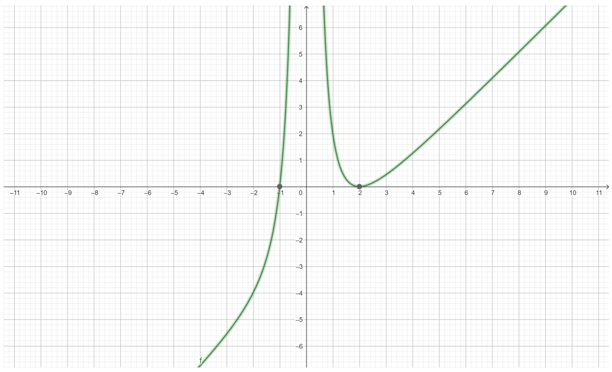
***

Megoldás: Szabó Kinga magiszteris hallgató, BBTE, Kolozsvár

a) $f'(x) = \dfrac{(3x^2 - 6x)x^2 - (x^3 - 3x^2 + m) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{3x^4 - 6x^3 - 2x^4 + 6x^3 - 2mx}{x^4} = $
$= \dfrac{x^4 - 2mx}{x^4} = \dfrac{x^3 - 2m}{x^3}$

Mivel $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2m = 0 \Rightarrow x^3 = 2m \Rightarrow x = \sqrt[3]{2m}$ és $x = 2$ helyi szélsőértéke a függvénynek, ezért $\sqrt[3]{2m} = 2 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$

b) Ha $m = 4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$, és a grafikus kép az alábbiakban látható:



c) A Viète összefüggések alapján:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \alpha \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -4 \end{cases}$$

Ha $x_1x_2x_3 = -4$, akkor az egyenletnek vagy 3 valós gyöke van, vagy 1 valós gyöke és két komplex gyöke van.

Ha az egyenletnek 3 valós gyöke van, akkor fennáll az $x_1 + x_2 + x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ egyenlőség.

Legyenek az eredeti egyenletnek x_1 valós és $x_2 = a + ib, x_3 = c + id$ komplex gyökei, ekkor: $x_1 + x_2 + x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow ib + id = 0 \Rightarrow b = -d$
Ugyanakkor $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -4 \Rightarrow x_1(a + ib)(c + id) = -4 \Rightarrow x_1(ac + adi + bci - bd) = -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow adi + bci = 0 \Rightarrow ad = -bc$ de tudjuk, hogy $b = -d \Rightarrow ad = cd \Rightarrow a = c$.

Tehát x_1 az x_2 konjugáltja, vagyis $x_1 = a + ib, x_2 = a - ib$.