XI. osztály

L: 3650. *Oldjuk meg az $X^2-6X+8I_2=0$ egyenletet az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazon!*

***

Megoldás: Urus József-Norbert, magiszteris hallgató, BBTE, Kolozsvár

Figyelembe véve, hogy az egységmátrix a szorzási műveletre nézve mindennel kommutál, az $f(X)=aX^2+bX+cI_2$ másodfokú mátrixfüggvény is kanonikus alakra hozható, – a másodfokú valós függvények mintájára – éspedig:

$$\begin{aligned} f(X) &= aX^2+bX+cI_2 = a\left(X^2+\frac{b}{a}X+\frac{c}{a}I_2\right)= \\ &= a\left[\left(X^2+2\frac{b}{2a}X+\frac{b^2}{4a^2}I_2\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)I_2\right]= \\ &= a\left(X+\frac{b}{2a}I_2\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}I_2 = a\left(X+\frac{b}{2a}I_2\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}I_2, \end{aligned}$$

ahol $\Delta=b^2-4ac$. A mi esetünkben az együtthatók $a=1, b=-6$ és $c=8$, vagyis a megadott egyenlet így alakul:

$$(X-3I_2)^2-I_2=O_2 \quad \Leftrightarrow \quad (X-3I_2)^2=I_2.$$

Bevezetve az $Y=X-3I_2, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ változócserét, az $Y^2=I_2$ egyenlethez jutunk.

Legyen $Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$, ahol $y_1,y_2,y_3,y_4\in\mathbb{R}$.

Ekkor a négyzetre emelés elvégzése után kapjuk, hogy:

$$Y^2=I_2 \iff \begin{bmatrix} y_1^2+y_2y_3 & y_2(y_1+y_4) \\ y_3(y_1+y_4) & y_2y_3+y_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vagyis meg kell oldanunk a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} y_1^2+y_2y_3=1, \\ y_2(y_1+y_4)=0, \\ y_3(y_1+y_4)=0, \\ y_2y_3+y_4^2=1. \end{cases}$$

A második és harmadik egyenletből kiindulva a következő eseteket tárgyalhatjuk:

I. eset: ha $y_2=0$ és $y_3=0$, akkor $y_1=\pm1$ és $y_4=\pm1$.

II. eset: ha $y_2=0$ és $y_1+y_4=0$, akkor $y_1=\pm1$, $y_4=-y_1$ és $y_3\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

III. eset: ha $y_3=0$ és $y_1+y_4=0$, akkor $y_1=\pm1$, $y_4=-y_1$ és $y_2\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

IV. eset: ha $y_1+y_4=0$ és $y_2y_3\neq0$, akkor $y_1=p$, $y_4=-p$, $y_2=q$ és $y_3=\dfrac{1-p^2}{q}$, ahol $p,q\in\mathbb{R}^*$ tetszőlegesek.

Összegezve, az $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra a következő megoldáshalmazt találtuk:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ \frac{1-p^2}{q} & -p \end{bmatrix}\right\},$$

ahol $t\in\mathbb{R}$ és $p,q\in\mathbb{R}^*$ tetszőlegesek.

De a változócsere alapján $X = Y + 3I_2$, vagyis az adott egyenlet megoldáshalmaza:

$$\left\{\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 0\\ t & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\ t & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & t\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & t\\ 0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3+p & q\\ \frac{1-p^2}{q} & 3-p\end{bmatrix}\right\},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$ és $p, q \in \mathbb{R}^*$ tetszőlegesek.

L: 3651. *Adott az* $X = \begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *mátrix, ahol* $x^2 + y^2 < 1$. *Mutassuk ki, hogy léteznek az* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *valós számsorozatok úgy, hogy* $X^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n\\ -y_n & x_n\end{pmatrix}$, *bármely* $n \in \mathbb{N}^*$ *esetén, majd igazoljuk, hogy* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

***

Megoldás: Kiss Andrea-Tímea, magiszteris hallgató, BBTE, Kolozsvár

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy az $X = \begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén $X^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n\\ -y_n & x_n\end{pmatrix}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

$n = 1$ esetén $X^1 = X$, illetve $n = 2$ esetén $X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy\\ -2xy & x^2 - y^2\end{pmatrix}$, vagyis az $n = 1, 2$ esetekben a főátlón ugyanazok az értékek, a mellékátlón pedig ellentétes értékek jelennek meg.

Feltételezzük, hogy $X^k = \begin{pmatrix} x_k & y_k\\ -y_k & x_k\end{pmatrix}$, bármely $k \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Ekkor $X^{k+1} = X^k \cdot X = \begin{pmatrix} x \cdot x_k - y \cdot y_k & y \cdot x_k + x \cdot y_k\\ -(y \cdot x_k + x \cdot y_k) & x \cdot x_k - y \cdot y_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} & y_{k+1}\\ -y_{k+1} & x_{k+1}\end{pmatrix}$, így az X^{k+1} mátrix esetén is a főátlón ugyanazok az értékek, a mellékátlón pedig ellentétes értékek jelennek meg. A matematikai indukció alapján $X^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n\\ -y_n & x_n\end{pmatrix}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Az indukció utolsó lépéséből kiderül, hogy

$$\begin{cases} x_{n+1} = x \cdot x_n - y \cdot y_n\\ y_{n+1} = y \cdot x_n + x \cdot y_n \end{cases}.$$

A második egyenlet x-szereséből kivonva az első egyenlet y-szeresét azt kapjuk, hogy $x \cdot y_{n+1} - y \cdot x_{n+1} = (x^2 + y^2) \cdot y_n$, ahonnan $x_{n+1} = \dfrac{1}{y}\left[x \cdot y_{n+1} - (x^2 + y^2) \cdot y_n\right]$, vagyis $x_n = \dfrac{1}{y}\left[x \cdot y_n - (x^2 + y^2) \cdot y_{n-1}\right]$. Ez alapján

$$y_{n+1} = x \cdot y_n + x \cdot y_n - (x^2 + y^2) \cdot y_{n-1} \Leftrightarrow y_{n+1} - 2x \cdot y_n + (x^2 + y^2) \cdot y_{n-1} = 0,$$

vagyis a $y_{n+2} - 2x \cdot y_{n+1} + (x^2 + y^2) \cdot y_n = 0$ egy másodrendű homogén rekurzív sorozatra vonatkozó összefüggés. Rendeljük hozza a karakterisztikus egyenletet:

$$r^2 - 2x \cdot r + (x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = x \pm i \cdot y = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm i \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

ahol legyen $\cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ és $\sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Így az $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozatot megadó képlet:

$$y_n = (\sqrt{x^2 + y^2})^n \cdot (\alpha \cdot \cos n\phi + \beta \cdot \sin n\phi).$$

Felhasználva, hogy y_1 és y_2 kiolvasható X-ből és X^2-ből, illetve hogy $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi = = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ és $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} y = x\cdot\alpha + y\cdot\beta \\ 2xy = (x^2-y^2)\cdot\alpha + 2xy\cdot\beta \end{cases},$$

ahonnan következik, hogy $\alpha = 0$ és $\beta = 1$. Tehát

$$y_n = (\sqrt{x^2+y^2})^n \cdot \sin n\phi,$$

ahol $\sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ és $\cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Ekkor

$$x_n = \frac{1}{y}\left[x\cdot(\sqrt{x^2+y^2})^n\cdot\sin n\phi - (\sqrt{x^2+y^2})^{n+2}\cdot\sin(n-1)\phi\right].$$

Ezek alapján $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, mivel $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2+y^2 < 1$, így $\sqrt{x^2+y^2} < 1$, tehát $(\sqrt{x^2+y^2})^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, felhasználva, hogy a sin korlátos függvény $\mathbb{R}$-en.

2. *megoldás*

Az $x^2+y^2 < 1$ feltétel alapján következik, hogy léteznek az egyértelműen meghatározott $r \in [0,1)$ és $\alpha \in [0,2\pi)$ számok, amelyekre $x = r\cos\alpha$ és $y = r\sin\alpha$. Ekkor

$$X = r\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matematikai indukció segítségével igazolható, hogy tetszőleges n pozitív természetes szám esetén

$$X^n = r^n\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^n\cos n\alpha & r^n\sin n\alpha \\ -r^n\sin n\alpha & r^n\cos n\alpha \end{pmatrix},$$

azaz léteznek az

$$x_n = r^n\cos n\alpha, \qquad y_n = r^n\sin n\alpha, \qquad n \geq 1$$

sorozatok úgy, hogy

$$X^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ -y_n & x_n \end{pmatrix}.$$

Mivel $r \in [0,1)$, következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(r^n\cos n\alpha) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}(r^n\sin n\alpha) = 0.$$

L: 3652. *Tanulmányozzuk az* $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$, $n \geq 1$, *valamint az általánosabb* $b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \ \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \alpha\sqrt{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *sorozatok konvergenciáját!*

***

Megoldás

Tetszőleges $n \geq 1$ természetes szám esetén írhatjuk, hogy

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

Másrészt, a tetszőleges pozitív n esetén könnyen belátható

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

egyenlőtlenségek alapján következik, hogy $a_{n+1} - a_n < 0$, vagyis az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan csökkenő.

Továbbá, ha az $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}^*$ egyenlőtlenségeket felírjuk a k-nak rendre $1, 2, \ldots, n$ értékeket adva, majd az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva, az alábbi egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

azaz

$$a_n - 1 + 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < a_n + 2\sqrt{n},$$

vagyis

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1\right) < a_n < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1\right) + 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

De

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \in (0,1) \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \in (0,1),$$

ahonnan következik, hogy az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat korlátos.

Mivel a sorozat szigorúan csökkenő és korlátos, ezért konvergens.

Az általánosabb $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat esetén a megfelelő egyenlőtlenségek rendre:

$$b_n - 1 + \alpha\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < b_n + \alpha\sqrt{n},$$

vagy

$$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) - \alpha\sqrt{n} < b_n < 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) + 1 - \alpha\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

vagy

$$\sqrt{n}\left(2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \alpha\right) - 2 < b_n < \sqrt{n}\left(2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \alpha\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségekben határértékre térve $n \to \infty$ esetén

$$\infty\,(2-\alpha)-2 \le \lim_{n\to+\infty} b_n \le \infty\,(2-\alpha)-1,$$

egyenlőtlenségeket kapjuk, ahonnan az alábbi három eset adódik:

- ha $\alpha < 2$, akkor $b_n \to +\infty$;
- ha $\alpha = 2$, akkor a $(b_n)_{n\ge1}$ sorozat konvergens;
- ha $\alpha > 2$, akkor $b_n \to -\infty$.

L: 3653. *Adottak az* $(a_n)_{n\ge1}$ *és* $(b_n)_{n\ge1}$ *sorozatok:*

$$a_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \text{ és } b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

bármely $n \in \mathbb{N}^*$ *esetén. Tanulmányozzuk a* $(b_n)_{n\ge1}$ *sorozat konvergenciáját és konvergencia esetén számítsuk ki a határértékét!*

***

Megoldás

A feladat kijelentése alapján

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2+2k}{(k+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+2k}{(k+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k+1}\right] =$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{n+1}\frac{n+2}{2}\right] = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{2(n+1)} = \log_2 \frac{2(n+1)}{n+2} = 1 + \log_2 \frac{n+1}{n+2}.$$

A levezetettek szerint:

$$b_{n+1} - b_n = \log_2 \frac{n+2}{n++} - \log_2 \frac{n+1}{n+2} = \log_2 \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)} =$$

$$= \log_2 \frac{n^4+4n+4}{n^2+4n+3} = \log_2 \left(1 + \frac{1}{n^2+4n+3}\right) > 0,$$

ami azt mutatja, hogy a $(b_n)_{n\ge1}$ sorozat szigorúan növekvő.

Továbbá $\frac{n+1}{n+2} < 1$ alapján $\log_2 \frac{n+1}{n+2} < 0$, tehát $b_n = 1 + \log_2 \frac{n+1}{n+2} < 1$. Így a szigorúan növekvő sorozatunk felülről korlátos is, tehát konvergens. A határérték:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \log_2 \frac{n+1}{n+2}\right) = 1 + \log_2 1 = 1 + 0 = 1.$$

XII. osztály

L: 3654. *Tekintsük az* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *számokat és értelmezzük a „$*$” műveletet:*
$x * y = xy + ax + by + c$, *bármely* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén.*

a) *Milyen összefüggés kell fennálljon az* a, b, c *valós számok között, ahhoz, hogy a művelet asszociatív legyen?*

b) *Mutassuk ki, hogy a művelet akkor és csak akkor rendelkezik semleges elemmel, ha asszociatív!*

***

Megoldás: Faluvégi Boglárka, magiszteris hallgató, BBTE, Kolozsvár

a) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (xy + ax + by + c) * z \\ &= xyz + axz + byz + cz + axy + a^2x + aby + ac + bz + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * (yz + ay + bz + c) \\ &= xyz + axy + bxz + xc + ax + byz + aby + b^2z + bc + c\end{aligned}$$

Ha a „$*$” művelet asszociatív, akkor $(x * y) * z = x * (y * z) \iff$
$\iff xyz + axz + byz + cz + axy + a^2x + aby + ac + bz + c =$
$= xyz + axy + bxz + xc + ax + byz + aby + b^2z + bc + c \iff$
$\iff axz + cz + a^2x + ac + bz = bxz + xc + ax + b^2z + bc \iff$
$\iff xz(a - b) - z(b^2 - b - c) + x(a^2 - a - c) + c(a - b) = 0$, bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$.
Ekkor $a - b = 0$, $b^2 - b - c = 0$, $a^2 - a - c = 0$ és $c(a - b) = 0$.

$$\iff b = a \text{ és } c = a^2 - a$$

b) Ha a „$*$” művelet asszociatív, akkor: $b = a$ és $c = a^2 - a$. Ekkor

$$x * y = xy + ax + by + c \iff$$

$$\iff x * y = xy + ax + ay + a^2 - a = xy + a(x + y) + a^2 - a$$

Legyen e a semleges elem, ekkor $x * e = x$.

$$x * e = xe + a(x + e) + a^2 - a = x$$

$$x(e + a) + (ae + a^2 - a) = x \iff e + a = 1 \text{ és } ae + a^2 - a = 0.$$

Ekkor létezik a semleges elem és $e = 1 - a$, és $a(1 - a) + a^2 - a = a - a^2 + a^2 - a = 0$ is teljesül.

Ha a „$*$" művelet nem asszociatív, akkor $b \neq a$ és $c \neq a^2 - a$.

$$x * e = xe + ax + be + c = x$$

$e + a = 1$ és $be + c = 0$.
$e = 1 - a$ és $b(1 - a) + c = 0$. De $b \neq a$ és $c \neq a^2 - a$, ekkor $b(1 - a) + c \neq 0$.

L: 3655. *Tekintsük a* $G = (1,2) \cup (2, +\infty)$ *halmazt, valamint értelmezzük a „$*$" műveletet:* $x * y = 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$, *bármely* $x, y \in G$ *esetén. Igazoljuk, hogy* $(G, *)$ *Abel-csoport!*

***

Megoldás: Gál Tamara, magiszteris hallgató, BBTE, Kolozsvár

Először igazoljuk, hogy a $*$ művelet belső művelet. Vagyis bármely $x, y \in G$-re $x * y \in G$.

I.eset: Ha $x, y \in (1,2) \in G$, akkor

$$\begin{aligned}
&1 < x < 2, 1 < y < 2, \text{ és } x * y = 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} \text{ alapján}\\
&1 < 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} < 2 \iff\\
&0 < (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} < 1 \iff\\
&0 < (x-1)^{\ln(y-1)} < 1 \iff\\
&-\infty < \ln(x-1)\ln(y-1) < 0.
\end{aligned}$$

Mivel $\ln(x-1) < 0$, ha $x \in (1,2)$ és $\ln(y-1) < 0$, ha $y \in (1,2)$ következik, hogy a szorzat kisebb mint nulla, tehát ez igaz.

II.eset: Ha $x \in (2, \infty), y \in (2, \infty)$, akkor

$$\begin{aligned}
&2 < x * y < \infty\\
&2 < 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} < \infty |(-1)\\
&1 < (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} < \infty |()^2\\
&1 < (x-1)^{\ln(y-1)} < \infty |(\ln)\\
&0 < \ln(x-1)\ln(y-1) < \infty.
\end{aligned}$$

Mivel $\ln(x-1) > 0$, és $\ln(y-1) > 0$ következik, hogy a szorzatuk is nagyobb mint 0, tehát $x * y \in G$.

III. eset $x \in (1,2), y \in (2, \infty)$ vagy fordítva $x \in (2, \infty), y \in (1,2)$. Ebben az esetben is írhatjuk hogy

$$-\infty < \ln(x-1)\ln(y-1) < 0.$$

Mivel $\ln(x-1) < 0$ és $\ln(y-1) > 0$ ezért a szorzatuk kisebb mint nulla, tehát az egyenlőség ebben az esetben is igaz.

Az I, II, és III. esetből következik, hogy bármely $x, y \in G, x * y \in G$. Tehát belső műveletünk van.

A továbbiakban igazoljuk az Abel-csoport axiómáit:

Kommutativitás: $x * y = y * x$, bármely $x, y \in G$ esetén.

Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
x * y = 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{(y-1)}} &= 1 + (y-1)^{\ln\sqrt{(x-1)}} = y * x\\
&\Rightarrow 1 + (x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)} = 1 + (y-1)^{\frac{1}{2}\ln(x-1)}\\
&\Rightarrow \left[(x-1)^{\ln(y-1)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(y-1)^{\ln(x-1)}\right]^{\frac{1}{2}} |()^2\\
&\Rightarrow (x-1)^{\ln(y-1)} = (y-1)^{\ln(x-1)} | ln\\
&\Rightarrow \ln(x-1)\ln(y-1) = \ln(y-1)\ln(x-1)
\end{aligned}$$

Mivel $x * y = y * x$ következik, hogy a művelet kommutatív.

Asszociativitás: $(x * y) * z = x * (y * z)$, bármely $x, y \in G$ esetén.

$$\begin{aligned}
x*(y*z)=(x*y)*z &\iff (1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}})*z = x*(1+(y-1)^{\ln\sqrt{z-1}})\\
&\iff 1+(1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}-1)^{\ln\sqrt{z-1}} = 1+(x-1)^{\ln\sqrt{1+(y-1)^{\ln\sqrt{z-1}}-1}}\\
&\iff 1+\left((x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}\right)^{\ln\sqrt{z-1}} = 1+(x-1)^{\ln\sqrt{(y-1)^{\ln\sqrt{z-1}}}}\\
&\iff 1+\left((x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)}\right)^{\frac{1}{2}\ln(z-1)} = 1+(x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)\frac{1}{2}\ln(z-1)}\\
&\iff 1+(x-1)^{\frac{1}{4}\ln(y-1)\ln(z-1)} = 1+(x-1)^{\frac{1}{4}\ln(y-1)\ln(z-1)}
\end{aligned}$$

Tehát a művelet asszociatív.

Semleges elem létezése: megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan e_1 szám amelyre

$$x * e_1 = e_1 * x = x, \text{ bármely } x \in G \text{ esetén.}$$

Mivel a művelet kommutatív, elégséges csak az egyik oldalt vizsgálni.

$x * e_1 = 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{e_1-1}} = x \Rightarrow (x-1)^{\ln\sqrt{e_1-1}} = (x-1) \Rightarrow \ln\sqrt{e_1-1} = 1$
$\Rightarrow \sqrt{e_1-1} = e \Rightarrow e_1 - 1 = e^2 \Rightarrow e_1 = e^2 + 1,$
tehát van semleges elem, és ez $e_1 = e^2 + 1$.

Szimmetrizálható elemek: megvizsgáljuk, hogy bármely $x \in G$ esetén létezik-e $x^{-1} \in G$ úgy, hogy $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e_1$.

A kommutativitás miatt itt is elégséges csak az egyik oldalt vizsgálni.

$$x * x^{-1} = e_1 \iff 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{x^{-1}-1}} = e^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^{\ln\sqrt{(x^{-1}-1)}} = e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^{\frac{1}{2}\ln(x^{-1}-1)} = e^2 \Rightarrow (x-1)^{\ln(x^{-1}-1)} = e^4 \Rightarrow \ln(x^{-1}-1)\ln(x-1) = \ln e^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(x^{-1}-1)\ln(x-1) = 4 \Rightarrow \ln(x^{-1}-1) = \frac{4}{\ln(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{-1} - 1 = e^{\frac{4}{\ln(x-1)}} \Rightarrow x^{-1} = e^{\frac{4}{\ln(x-1)}} + 1$$

Mivel a fenti művelet belső művelet, kommutatív, asszociatív, van semleges eleme és minden elem szimmetrizálható a halmazban, következik, hogy $(G, *)$ Abel-csoport.

L: 3656. *Adottak az $f, g, h\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)\sqrt{\operatorname{arctg} x}$, $h(x) = f(x)\sqrt{\operatorname{arcctg} x}$ függvények. Ha a g és h függvények rendelkeznek primitívvel, mutassuk ki, hogy az f függvénynek is van primitívje!*

Longáver Lajos tanár, Nagybánya

A szerző megoldása

Vizsgáljuk az $u, v\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $u(x) = g(x)\sqrt{\arctan x} = f(x)\operatorname{arctg} x$, és $v(x) = h(x)\sqrt{\operatorname{arcctg} x} = f(x)\operatorname{arcctg} x$ függvényeket, amelyek rendelkeznek primitívekkel, mert mindkettő egy primitiválható és egy folytonosan deriválható függvény szorzata. Így az

$$u(x) + v(x) = f(x)\left(\arctan x + \operatorname{arcctg} x\right) = \frac{\pi}{2} f(x)$$

összegük is rendelkezik primitívvel, tehát f maga is primitiválható.

L: 3657. *Van-e primitívje az* $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{3} & , \ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ *függvénynek? Ha igen, akkor számítsuk ki!*

***

Megoldás: Seres Brigitta Alexandra, magiszteris hallgató, BBTE, Kolozsvár

A függvény folytonos az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon. Igazoljuk, hogy folytonos az $x = 0$ pontban. Írhatjuk, hogy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} - \frac{1}{3} \right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x + \sin x}{\sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} - \frac{1}{3} \right).$$

Kiszámítjuk a következő két határértéket (a másodiknál a l'Hopital-szabályt alkalmazzuk):

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x + \sin x}{\sin x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x}{\sin x} + 1 \right) = 2, \quad \text{valamint} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{2\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{1}{6}.$$

Következik, hogy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$. Figyelembe véve, hogy $f(0) = 0$, azt kapjuk, hogy f folytonos az $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, tehát van primitívje ezen az intervallumon.

Észrevesszük, hogy $\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x - \frac{x}{3} \right)$ egy primitívje az f függvénynek a $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, következik, hogy f függvény egy F primitívje a következő alakban írható fel:

$$F(x) = \begin{cases} a & ,\text{ha } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x - \dfrac{x}{3} + b & ,\text{ha } x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \text{ahol} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ahhoz hogy F ténylegesen primitívje legyen f-nek a $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, szükséges hogy F deriválható legyen a $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon. Mivel elemi függvényekből tevődik össze, F ténylegesen deriválható a $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon. Szükséges, hogy F folytonos és deriválható legyen $x = 0$ pontban, és $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0)$. Mivel

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} - \frac{x}{3} + b \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{x}{3} + b = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x\cos x} + b$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} + b = 0 + b = b.$$

Tudva, hogy $F(0) = a$, ezért $b = a$. Tehát,

$$F(x) = \begin{cases} a & ,\text{ha } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x - \dfrac{x}{3} + a & ,\text{ha } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Másrészt

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} - \frac{1}{3} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right) - \frac{1}{3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} - \frac{1}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2x\sin x + x^2 \cos x} - \frac{1}{3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x + x\cos x} - \frac{1}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x}\cos x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Tehát $F'(0) = 0$, vagyis F deriválható $x = 0$ pontban, így F deriválható a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon. Továbbá $F'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{3} = f(x)$, bármely $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén, valamint $F'(0) = f(0)$, azaz $F' = f$. Ebből következik, hogy $F' = f$.