XI. osztály

L: 3666. *Az* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *mátrixok esetén* $A + B = I_n$ *és* $A^2 = A^3$. *Igazoljuk, hogy* $\det(I_n + AB) \neq 0$.

b) *Ha* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *és* $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, *akkor számítsuk ki az* A^n *mátrixot,* $n \in \mathbb{N}^*$ *esetén!*

***

Megoldás

a) Ha $A + B = I_n$, akkor $B = I_n - A$, $AB = A - A^2 = BA$, $ABA = A^2 - A^3 = O_n$. Ekkor $(AB)^2 = ABAB = O_n$.

Másrészt, $I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n - AB)(I_n + AB)$, ahonnan $\det(I_n + AB) \neq 0$.

b) Az A mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - \operatorname{Tr} A\,\lambda + \det A = 0$, azaz $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, amelynek gyökei $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$. Ekkor $A^n = 2^n B + 3^n C$ alakú, ahol a $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixokat az $n = 1$ és $n = 2$ sajátos esetekből határozhatjuk meg. A

$$\begin{cases} 2B + 3C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \\ 4B + 9C = \begin{pmatrix} -16 & 20 \\ -25 & 29 \end{pmatrix} \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix},$$

ahonnan következik, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n \\ 5 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n & 5 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

L: 3667. *Határozzuk meg az* $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix}$ *mátrix rangját az* $a, b \in \mathbb{R}$ *paraméterek függvényében!*

***

Megoldás

Ha egy mátrix sorait (oszlopait) egymás között felcseréljük, vagy valamelyik sorát (oszlopát) megszorozzuk egy számmal, és hozzáadjuk egy másik sorához (oszlopához), az így kapott új mátrix rangja megegyezik az eredeti mátrix rangjával, azaz rang szempontjából azzal ekvivalens ($\equiv$).

Ha felcseréljük a mátrix első és harmadik sorát, majd az első sort kivonjuk a másodikból, illetve az első sor a-szorosát kivonjuk a harmadikból, akkor az alábbi – A-val megegyező rangú – mátrixot kapjuk:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & b(1-a) & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix}.$$

a) Ha $a = 1$, akkor

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahonnan:

1. ha $b = 1$, akkor $\operatorname{rang} A = 1$;
2. ha $b \neq 1$, akkor $\operatorname{rang} A = 2$.

b) Ha $a \neq 1$ és $b = 0$, elosztjuk a harmadik sor elemeit $(1-a)$-val. Ekkor

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1-a & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 1+a & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

ahonnan:

3. $\operatorname{rang} A = 3$.

c) Ha $a \neq 1$ és $b \neq 0$, elosztjuk a harmadik sor elemeit $(1-a)$-val. Ekkor

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & b & 1+a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & b(a-1) \end{vmatrix} = b(a-1) \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & a \\ 0 & b(a-1) & 1-a \\ 0 & b & 1+a \end{vmatrix} = b(a-1)(a+2), \quad \begin{vmatrix} 1 & b & a \\ 0 & b(a-1) & b-1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = b(a-b),$$

ahonnan:

4. ha $a = b = -2$, akkor $\operatorname{rang} A = 2$;
5. ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, b \neq 0$ és $a \neq b$, akkor $\operatorname{rang} A = 3$.;

L: 3668. *Tanulmányozzuk az* $x_n = \dfrac{1}{C_n^0} + \dfrac{1}{C_n^1} + \ldots + \dfrac{1}{C_n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *sorozat konvergenciáját, és ha konvergens, akkor számítsuk ki a határértékét!*

***

Megoldás

Először igazoljuk, hogy $x_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2(n+1)} x_n$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Mivel a feltétel alapján $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$, ha $n \in \mathbb{N}^*$, következik, hogy

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{C_{n+1}^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{C_{n+1}^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{n+1}{k} C_n^{k-1}} = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{C_n^{k-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{C_n^k} = 1 + \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{C_n^k} + x_n \right).$$

Másfelől, az utolsó kifejezésben szereplő összegre írható, hogy

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{C_n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{C_n^{n-k}} = \sum_{i=1}^{0} \frac{n-i}{C_n^i} = n \sum_{i=1}^{0} \frac{1}{C_n^i} - \sum_{i=1}^{0} \frac{i}{C_n^i},$$

azaz $y_n = nx_n - y_n$, tehát $y_n = \dfrac{n}{2}x_n$.

Visszahelyettesítve x_{n+1} kifejezésébe, tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$ esetén:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{C_n^k} + x_n\right) = 1 + \frac{1}{n+1}\left(y_n + x_n\right) = 1 + \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{2}x_n + x_n\right) = \\ &= 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}x_n, \end{aligned}$$

amit igazolni akartunk.

Felhasználva a levezetett összefüggést, bármely $n \geq 3$ esetén írhatjuk:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= 1 + x_n\left(\frac{n+2}{2(n+1)} - 1\right) = 1 - \frac{n}{2(n+1)}x_n = \\ &= 1 - \frac{n}{2(n+1)}\left(\frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \ldots + \frac{1}{C_n^n}\right) = \\ &= 1 - \frac{n}{2(n+1)}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} + \ldots\right) \leq 0, \end{aligned}$$

tehát $x_{n+1} - x_n \leq 0$, bármely $n \geq 3$ esetén, vagyis a pozitív tagú sorozat csökkenő, így konvergens, határértéke legyen $l \geq 0$. Határértékre térve a levezetett rekurziós összefüggésben, az $l = 1 + \dfrac{l}{2}$ egyenletet kapjuk ahonnan, $l = 2$.

Tehát $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

L: 3669. *Számítsuk ki:* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\sqrt{(k^3+1)(k+2)} - \dfrac{n^3}{3}\right)$.

Bencze Mihály tanár, Brassó

A szerző megoldása

Bármely $k \geq 2$ esetén fennállnak a

$$\left(k^2 + k - 1\right)^2 < \left(k^3 + 1\right)(k+2) \leq \left(k^2 + k\right)^2$$

egyenlőtlenségek, ahonnan

$$k^2 + k - 1 < \sqrt{\left(k^3+1\right)(k+2)} \leq k^2 + k,$$

és

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{n}\left(k^2 + k - 1\right) < \sum_{k=2}^{n}\sqrt{\left(k^3+1\right)(k+2)} \leq \sum_{k=2}^{n}\left(k^2 + k\right), \quad \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad &\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - n - 1 < \sum_{k=2}^{n}\sqrt{\left(k^3+1\right)(k+2)} \leq \\ &\leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 2, \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad &n^2 - \frac{n}{3} - 1 < \sum_{k=2}^{n}\sqrt{\left(k^3+1\right)(k+2)} - \frac{n^3}{3} \leq n^2 + n \end{aligned}$$

A kapott egyenlőtlenségeket végigosztva n^2-tel és határértékre térve következik, hogy:

$$1=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-\dfrac{n}{3}-1}{n^2}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=2}^{n}\sqrt{(k^3+1)(k+2)}-\frac{n^3}{3}\right)\le\lim_{min}\frac{n^2+n}{n}=1,$$

ahonnan a fogóelv (rendőrelv) alapján

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=2}^{n}\sqrt{(k^3+1)(k+2)}-\frac{n^3}{3}\right)=1.$$

XII. osztály

L: 3670. *A $(G,\cdot)$ csoport semleges eleme e, és létezik olyan $n\ge 3$ rögzített természetes szám, amelyre egyidejűleg fennáll az alábbi két feltétel:*

(1) $x^ny^n=y^nx^n$, bármely $x,y\in G$ esetén;

(2) $z^{n+1}=e$ vagy $z^{n-1}=e$, bármely $z\in G$ esetén.

Igazoljuk, hogy $(G,\cdot)$ Abel-csoport!

***

Megoldás

A (2) feltétel alapján az alábbi esetek állnak fenn:

1. ha $x^{n+1}=y^{n+1}=e$, ekkor $x^n=x^{-1}$ és $y^n=y^{-1}$, és az (1) feltétel alapján $x^{-1}y^{-1}=y^{-1}x^{-1}$, ahonnan következik, hogy $xy=yx$;

2. ha $x^{n-1}=y^{n-1}=e$, ekkor $x^n=x$ és $y^n=y$, és az (1) alapján $xy=yx$;

3. ha $x^{n+1}=y^{n-1}=e$, vagy fordítva, ekkor $x^n=x^{-1}$ és $y^n=y$, és az (1) feltétel alapján $x^{-1}y=yx^{-1}$, azaz $xy=yx$.

Tehát $(G,\cdot)$ Abel-csoport.

L: 3671. *Ha x,y,z,t négy olyan valós szám, amely teljesíti az*

(1) $x\le y\le z\le t$; (2) $x+y+z+t=7$; (3) $x^2+y^2+z^2+t^2=19$

feltételeket, akkor igazoljuk, hogy $x\le 1$ és $t\ge\dfrac{5}{2}$.

Szász Róbert tanár, Marosvásárhely

A szerző megoldása

A feltételek alapján írhatjuk, hogy:

$$\sum xy=\frac{1}{2}\left[\left(\sum x\right)^2-\sum x^2\right]=15.$$

A Viète-képletek alapján képezzük továbbá a P polinomot, amelynek gyökei a feltételben szereplő x,y,z,t:

$$P(u)=u^4-7u^3+15u^2+s_1u+s_2.$$

Ha $x<y$, akkor Rolle tétele alapján a $P'(u)=0$ egyenletnek van egy gyöke x és y között. Ha $x=y$, akkor x gyöke a $P'(u)=0$ egyenletnek. Ezt a gondolatmenetet folytatva, az következik, hogy a $P'(u)=0$ mindhárom gyöke valós, és ezek a gyökök az $[x,t]$ intervallumban vannak.

A P-re alkalmazott fenti gondolatmenetet megismételve a P' polinomra, azt kapjuk, hogy a $P''(u)=0$ egyenlet mindkét gyöke valós, és ezek a gyökök a $P'(u)=0$ egyenlet legkisebb és legnagyobb gyöke közé esnek, vagyis az $[x,t]$ intervallumban vannak. Mivel

$$P''(x)=0\iff 12u^2-42u+30=0\iff u\in\left\{1,\frac{5}{2}\right\}\Rightarrow\left[1,\frac{5}{2}\right]\subset[x,t],$$

és így
$$x \leq 15 \quad \text{és} \quad \frac{5}{2} \leq t.$$

Mivel $x=-1, y=z=t=\frac{5}{2}$ az (1) feltételeit teljesítő megoldása a (2) és (3) egyenletekből álló rendszernek, ez azt mutatja, hogy a t értéke el is érheti az $\frac{5}{2}$-et, tehát tovább nem javítható a t korlátja.

Hasonlóan, az
$$x=y=1, z=\frac{5-\sqrt{5}}{2}, t=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$
megoldás mutatja, hogy x becslése is a lehető legjobb.

L: 3672. *Van-e primitívje az*
$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+1}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x<0\\ 0, & \text{ha } x=0\\ \cos x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x>0\end{cases} \quad \text{függvénynek?}$$

Longáver Lajos tanár, Nagybánya

A szerző megoldása

Vizsgáljuk a $g, h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}, & \text{ha } x<0,\\ 0, & \text{ha } x=0,\\ \cos x, & \text{ha } x>0\end{cases} \qquad \text{és} \qquad h(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0\\ 0, & \text{ha } x=0\end{cases}$$
függvényeket.

A g függvény folytonosan deriválható, a h függvény primitívvel rendelkezik. Ekkor egy ismert tulajdonság alapján szorzatuknak, az f-nek van primitívje.

L: 3673. *Számítsuk ki:* $\displaystyle\int \arcsin(\sin x)\mathrm{d}x$, ahol $x\in[0,\pi]$.

***

Megoldás

Ismert, hogy
$$f\colon\ [0,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x, & \text{ha} \quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ \pi-x, & \text{ha} \quad x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$$

Ennek alapján
$$F(x)=\int\arcsin(\sin x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+c_1, & \text{ha} \quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ c, & \text{ha} \quad x=\dfrac{\pi}{2},\\ \pi x-\dfrac{x^2}{2}+c_2, & \text{ha} \quad x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$$

Mivel F deriválható, ezért folytonos, így folytonos az $x=\dfrac{\pi}{2}$ értékben is, azaz
$$c=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)=\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}+c_2\right),$$

ahonnan

$$c = \frac{\pi^2}{8} + c_1 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} + c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c - \frac{\pi^2}{8} \quad \text{és} \quad c_2 = c - \frac{3\pi^2}{8}.$$

Tehát, ha $x \in [0, \pi]$, akkor

$$F(x) = \int \arcsin(\sin x) \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}, \text{ ha } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \\ \pi x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3\pi^2}{8}, \text{ ha } x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} + \mathcal{C} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi^2}{4}, \text{ ha } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \\ \pi x - \dfrac{x^2}{2}, \text{ ha } x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} + \mathcal{C}.$$